Práctica Ma-293 Cálculo I para Computación

1. Determine la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)=x^3$, que son paralelas a la recta de ecuación $3x-y+1=0$

2. Calcule la ecuación de la recta tangente a $y^2-4x^2=5$ en el punto $(-1,3)$.

3. Determine la ecuación de la recta tangente a $y=x^3+1$ que contiene al punto $(1,6)$.

4. Una escalera de 4m de longitud se ha apoyado en una pared. La base de la escalera se aleja de la pared a 3 m/min ¿con qué rapidez está bajando la parte superior de la escalera, en el instante en que su extremo inferior está a 2,5m de la base de la pared?

5. De un tanque cilíndrico de 1,5 m de radio se deja salir agua. Si la profundidad del agua en el tanque disminuye 1 m/min ¿con qué rapidez disminuye la cantidad de agua en el instante en que la profundidad es de 3 m?

6. Grafique $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3}$. Haga el estudio necesario.

7. Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{4^{\ln x}-x^2}{\ln x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (2^x-1)^{\frac{2}{x+1}}$.

8. Demuestre que si $x>0$ entonces $\cos x > 1-\dfrac{x^2}{2}$

9. Demuestre que $x^5+10x+3=0$ tiene exactamente una raíz real.

Solución

① $3x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + 1$

la pendiente es 3

sea (x_0, y_0) el punto de tangencia

$m = f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{matrix} x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \end{matrix}$

si $x_0 = 1 \Leftrightarrow f(x_0) = f(1) = 1$, $(1,1)$ pto tang.

$b = y_0 - m x_0 = 1 - 3 \cdot 1 = -2$

$\therefore y_T = 3x - 2$

si $x_0 = -1$, $f(x_0) = f(-1) = -1$, $(-1,-1)$

$b = 2 \quad \therefore y_T = 3x + 2$

---

② $m = \dfrac{dy}{dx}$ entonces $\dfrac{d}{dx}(y^2 - 4x^2) = \dfrac{d}{dx}(5)$

$\Leftrightarrow 2y\dfrac{dy}{dx} - 8x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{y}$

como $(-1,3)$ es el punto tangencia

$m = \dfrac{4 \cdot -1}{3} = \dfrac{-4}{3}$, $b = 3 - \dfrac{-4}{3} \cdot -1 = \dfrac{5}{3}$

$\therefore y_T = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{5}{3}$

---

③ $f(x) = x^3 + 1 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2$

(x_0, y_0) punto de tangencia

$m = f'(x_0) = 3x_0^2$, $b = -2x_0^3 + 1$

$\therefore y_T = 3x_0^2 \cdot x + -2x_0^3 + 1$

como pasa por $(1,6)$

$6 = 3x_0^2 \cdot 1 + -2x_0^3 + 1$

$\Leftrightarrow -2x_0^3 + 3x_0^2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = -1$ luego $y_0 = f(x_0) = 0$

punto de tangencia $(-1, 0)$

$\therefore y_T = 3 \cdot (-1)^2 x + -2 \cdot (-1)^3 + 1$

$= 3x + 3$

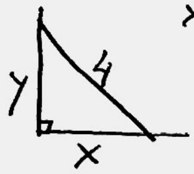
---

⑧ $f(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1$

pruebe que f es ↗

para $x > 0$

---

④ 

x : distancia base de escalera a pared

$\dfrac{dx}{dt}$: rapidez con que varía extremo inferior

$x^2 + y^2 = 4^2 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \dfrac{d}{dt}(4^2)$

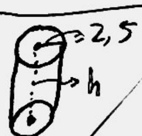
$\Leftrightarrow 2x\dfrac{dx}{dt} + 2y\dfrac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-x}{y}\dfrac{dx}{dt}$

cuando el extremo inferior está a 2,5m

entonces $y^2 = 16 - (2,5)^2 \Rightarrow y = 3,12$

$\therefore \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-2,5}{3,12} \cdot 3 = -2,4$ m/min.

---

⑤ 

$V = \pi r^2 h$

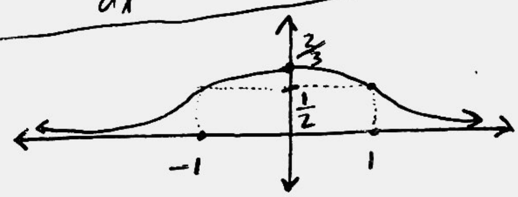
$V = 2,25\pi h$

h : altura = profundidad

$\dfrac{dh}{dt} = -1$

$\dfrac{dV}{dt} = 2,25\pi \cdot \dfrac{dh}{dt} = -2,25\pi$ m³/min

---

⑥ 

---

⑦ ⓐ $\dfrac{9}{4}$ ⓑ $(\ln 4) - 2$ ⓒ 4

---

⑨ Sea $f(x) = x^5 + 10x + 3$ es cont. en $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

por TVI $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tq: $f(c) = 0$

esto prueba tiene solución

ahora para probar que es única

supongo $\exists\, a \neq b$ tq: $f(a) = f(b) = 0$

f es cont. y derivable,

por Teor. Rolle $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tq: $f'(c) = 0$

$f'(c) = 5c^4 + 10 = 0$ no tiene solución. $\therefore \nexists$ 2: