Álgebra Lineal

UCR

Segundo tema, 2014

Presentaciones basadas principalmente en Arce,C, Castillo,W y González, J. (2004) Álgebra lineal. Tercera edición. UCR. San Pedro. Otras fuentes serán mencionadas cuando corresponda. En general el autor no clama que el contenido del documento sea original, sino solamente su presentación. Se permite el uso de este documento, siempre y cuando no sea por fines de lucro y se cite la fuente.

TEMA

Determinantes

Determinantes

Importancia

En 1995, Sheldon Axler sugirió que no se usaran los determinantes. Sin embargo, estos son importantes:

- Estudio de solitones (que aparecen en el estudio de fenómenos ópticos, proteínas y ADN, magnetos, redes de comunicación).
- La teoría de la relatividad.
- La teoría de la complejidad (en economía, por ejemplo).
- La teoría del caos (con aplicaciones en física y biología).
- La mariposa de Hofstadter (comportamiento de un electrón en un cristal periódico).
- Estudio de condensados de Bose-Einstein.
- Biofísica (tranferencia de información a través de una membrana celular).

Ejemplos de: Determinants and their applications in mathematical physics. Robert Vein; Paul Dale. New York, NY. Springer, 1999., y scholarpedia.org.

Definición

La función determinante D, o Det se define como
$D : M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

- *para $n = 1$, $D(a) = a$.*
- *para $n > 1$, y para cualquier fila i de A, $D(A)$ es la suma ponderada de n determinantes de submatrices de orden $n - 1$ (denotadas como A_{ij}):*

$$D(A) := (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} D(A_{in})$$

donde A_{ij} es la submatriz que se obtiene de A al eliminar la fila i y la columna j.

Una forma de calcular determinantes

La expansión de Laplace. (Desarrollo por cofactores.)
Llamada así en honor a Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), matemático y astrónomo francés que hizo decenas de aportes a la física, la matemática y la astronomía. También conocido por el Demonio de Laplace, un artículo que sugiere que existe el determinismo científico.
Veamos el procedimiento en detalle.

Determinante de una matriz 2×2

El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es

$$ad - bc$$

Determinante de una matriz triangular

Es el producto de las entradas en la diagonal.

Las operaciones elementales y el determinante

- Si cambio dos filas, multiplico el determinante por -1.
- Si multiplico una fila por a, multiplico el determinante por a.
- Si multiplico una fila por a y se la sumo a otra, el determinante NO cambia.

Lo mismo pasa con las columnas.
Por lo tanto puedo usar operaciones elementales en una matriz para que me quede una matriz triangular equivalente y calcular el determinante tomando el producto de la diagonal.
Veamos un ejemplo.

Multiplicar, invertir y transponer

$$Det(AB) = Det(A)Det(B)$$

$$Det(A) \neq 0 \Rightarrow Det(A^{-1}) = \frac{1}{Det(A)}$$

$$Det(A) = Det(A^t)$$

Otras propiedades

- Si hay una fila (o columna) que sea multiplo de otra fila (o columna, respectivamente), el determinante es cero.
- (En particular), si hay una fila (o columna) de ceros, el determinante es cero.
- (En particular), si hay dos filas (o columnas) iguales, el determinante es cero.
- La matriz NO es invertible si y solo si el determinante es cero.
- Si multiplico una matriz de orden $n \times n$ por un escalar a, entonces tengo que multiplicar el determinante por a^n.

Dos piezas de información

Hay una forma particular para calcular el determinante de una matriz por bloques.
El determinante de una matriz 3×3 se puede ver como el volumen de un paralelepípedo.

Forma sencilla de calcular el determinante de una matriz 3×3

Regla de Sarrus

Deducida por Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861), matemático francés, quien además creó, aunque fue ignorado, el mecanismo de Sarrus que permite transformar movimiento circular limitado a movimiento rectilíneo. Dicho mecanismo precedió al de Peaucellier-Lipkin que fue clave para el desarrollo del barco a vapor.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - (ceg + bdi + afh)$$

Ejercicio

Encuentre el determinante de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio

Usando las mismas matrices del ejercicio anterior, calcule el determinante de las siguientes usando cualquier procedimiento o propiedad vista hasta ahora.

- $D + G$
- AD
- E^t
- FJF
- B^2
- FI
- J^{2014}
- CFJ
- BEB^{-1}
- $ADGA^{-1}D^{-1}G^{-1}$

Linealidad por filas

En el caso de 2×2:

$$\begin{vmatrix} x_1 + \alpha y_1 & x_2 + \alpha y_2 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ c & d \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ c & d \end{vmatrix}$$

Además, lo mismo pasa con las columnas.
Veamos ahora el general.

Ejercicio

Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 5$ *encuentre los siguientes determinantes usando SOLO linealidad, propiedades de los determinantes y operaciones elementales.*

$$\begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b+c & c \\ b & c+a & a \\ c & a+b & b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

Probemos:
Una matriz cuadrada de orden n tiene rango n si y solo si su determinante no es cero.

La regla de Cramer

Nombrada en honor a Gabriel Cramer (1704-1752), matemático suizo. Estudió curvas algebraicas. La regla es menos eficiente que el método de Gauss-Jordan, pero a veces es útil, como en el estudio de ciertas derivadas.

La regla de Cramer

Sea $Ax = b$ un sistema donde A es cuadrada y $det(A) \neq 0$. Si A_i denota la matriz donde la i-ésima columna ha sido sustituida por b, entonces

$$x_i = det(A_i)/det(A)$$

Ejemplo

Resolvamos el sistema representado por $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$.

$$det(A) = 12, det(A_1) = -24,$$

$$det(A_2) = 0, det(A_3) = 24$$

Por lo tanto;

$$x_1 = det(A_1)/det(A) = -2,$$

$$x_2 = det(A_2)/det(A) = 0,$$

$$x_3 = det(A_3)/det(A) = 2.$$

Ejercicio

Use, si se puede, la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 4y + 5z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 8 \\ 6x_2 + 9x_3 = 12 \\ 3x_3 + x_1 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$