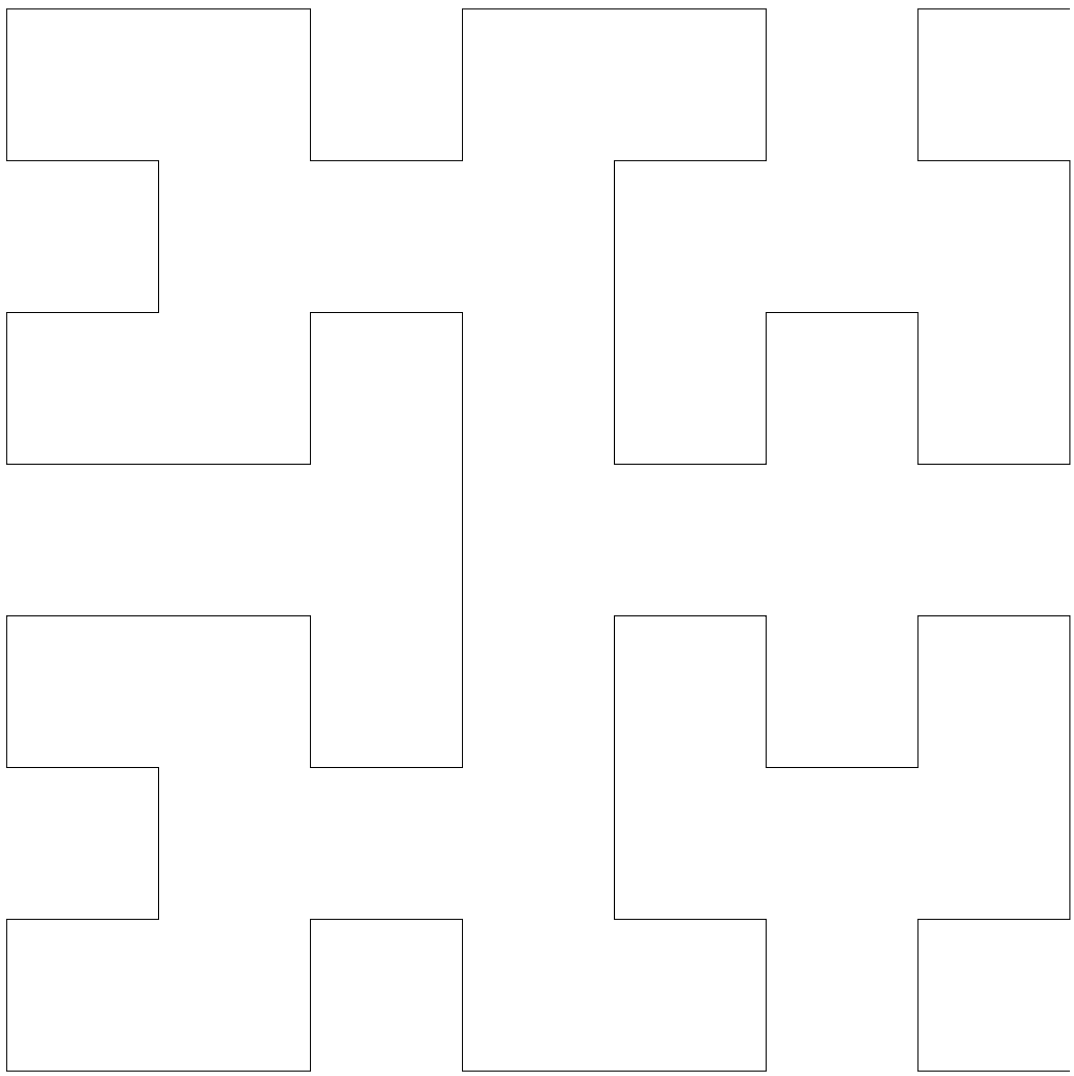
Primer Parcial



CAPÍTULO 1

Matrices

1.1. Matrices

DEFINICIÓN 1.1. Una *matriz* A de números con n filas y m columnas es un arreglo rectangular de nm números reales de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,m} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,m} \end{pmatrix}$$

En tal caso, se dice que la matriz A es de tamaño $n \times m$. El conjunto de matrices reales de tamaño $n \times m$ se denota $M(n, m; \mathbb{R})$. Para $i \in \{1, ..., n\}$ y $j \in \{1, ..., m\}$, el número real de la matriz A que se encuentra en la fila i y columna j se escribe a_{ij}. Para referirse a la matriz A es usual usar la notación $A = (a_{ij})_{n\times m}$, o simplemente $A = (a_{ij})$ si el tamaño de la matriz no es ambiguo.

1.2 TIPOS DE MATRICES

▮ **Matrices Columna:** son las matrices que sólamente tienen una columna, también se les conoce como *vectores columna*. El conjunto de matrices columna de tamaño n es $M(n, 1; \mathbb{R})$.

▮ **Matrices Fila:** estas matrices están formadas por una sola fila, y se les conoce también como *vectores fila*. El conjunto de matrices fila de tamaño m es $M(1; m; \mathbb{R})$.

▮ **Matriz Nula:** La única matriz de $M(n, m; \mathbb{R})$ con todas sus entradas iguales a 0, se le llama matriz nula. Se denota $0_{n\times m}$ ó 0.

▮ **Matriz Cuadrada:** Se dice de la matriz que tiene igual cantidad de filas y columnas. El conjunto de matrices cuadradas de n filas y n columnas se escribe $M(n; \mathbb{R})$.

▮ **Matrices Diagonales:** Son las matrices $D = (d_{ij}) \in M(n; \mathbb{R})$ que satisfacen que $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

▮ **Matriz Identidad:** En el conjunto $M(n; \mathbb{R})$, a la única matriz diagonal con exclusivamente 1's en su diagonal se le llama matriz identidad de tamaño n. Es denotada I_n o simplemente I.

▮ **Matriz Triangular Superior:** Se dice de la matriz $P = (p_{ij}) \in M(n; \mathbb{R})$ que sólo tiene ceros bajo su diagonal, es decir que satisface $p_{ij} = 0$ si $i > j$.

▮ **Matriz Triangular Inferior:** Se dice de la matriz $Q = (q_{ij}) \in M(n;\mathbb{R})$ que sólo tiene ceros sobre su diagonal, es decir que satisface $q_{ij} = 0$ si $i < j$.

▮ **Matriz Simétrica:** $A = (a_{ij}) \in M(n;\mathbb{R})$ se llama simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. En otras palabras, la entrada en la fila i y columna j de A es igual a la entrada en la fila j y columna i.

▮ **Matriz Antisimétrica:** $B = (b_{ij}) \in M(n;\mathbb{R})$ se llama antisimétrica si $b_{ij} = -b_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. La condición implica que los elementos de la diagonal son todos 0.

1.2. Álgebra de Matrices

Definición 1.3 (Igualdad de matrices). Sean $A, B \in M(n, m;\mathbb{R})$. Se dice que $A = (a_{ij})_{n\times m}$ y $B = (b_{ij})_{n\times m}$ son iguales si y sólo si entrada por entrada son iguales, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Definición 1.4 (Producto de una matriz por un escalar). Para todo $A = (a_{ij})_{n\times m} \in M(n, m;\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define la matriz $\alpha A = (c_{ij})_{n\times m} \in M(n, m;\mathbb{R})$ como $c_{ij} = \alpha a_{ij}$. Si $\alpha = -1$ la matriz $-1A$ se escribe $-A$.

Proposición 1.5. Para $A \in M(n, m;\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el producto por un escalar satisface:

(i) $1A = A$. (ii) $0A = 0_{n\times m}$. (iii) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Definición 1.6 (Suma de matrices). Sean $A, B \in M(n, m;\mathbb{R})$. La suma de $A = (a_{ij})_{n\times m}$ y $B = (b_{ij})_{n\times m}$ se define como la matriz $A + B = (c_{ij})_{n\times m} \in M(n, m;\mathbb{R})$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Proposición 1.7. Si $A, B, C \in M(n, m;\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces las suma de matrices verifica que:

(i) $A + B = B + A$

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(iii) $A + 0_{n\times m} = A$

(iv) $A + (-A) = 0_{n\times m}$

(v) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(vi) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Definición 1.8. Sean $A_1, \ldots, A_r \in M(n, m;\mathbb{R})$. Una *combinacion lineal* de las matrices $A_1, \ldots, A_r$ es cualquier matriz de la forma $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_r A_r$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$.

Definición 1.9 (Matriz transpuesta). Sea $A \in M(n, m;\mathbb{R})$. La matriz transpuesta de $A = (a_{ij})_{n\times m}$, denotada $A^t = (c_{ij})_{m\times n}$, es una matriz de $M(m, n;\mathbb{R})$ que satisface $c_{ij} = a_{ji}$.

Observación 1.10. Note que si v es un vector fila entonces v^t es un vector columna y que si w es un vector columna entonces w^t es un vector fila.

Observación 1.11. Si A es una matriz con cantidades de filas y columnas diferentes entonces la suma $A + A^t$ no está definida, ya que son matrices de diferente talla. Tal imposibilidad desaparece en las matrices cuadradas.

Proposición 1.12. Para $A, B \in M(n, m;\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, la transpuesta cumple con lo siguiente:

(i) $(A^t)^t = A$. (ii) $(A + \alpha B)^t = A^t + \alpha B^t$.

Definición 1.13 (Producto escalar). Sean $v = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \end{pmatrix}$ un vector fila y $w = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{n1} \end{pmatrix}^t$ un vector columna, ambos con la misma cantidad de entradas. Se define el producto escalar de v y w como el número real $v \cdot w$ que se obtiene de la siguiente forma

$$v \cdot w = \begin{pmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} = v_{11}w_{11} + v_{12}w_{21} + \cdot + v_{1n}w_{n1}$$

Proposición 1.14. Sean $v, v_1, v_2 \in M(1, n; \mathbb{R})$ vectores fila, $w, w_1, w_2 \in M(n, 1; \mathbb{R})$ vectores columna y $\alpha \in \mathbb{R}$. El producto escalar satisface las siguientes propiedades:

(i) $v \cdot w = w^t \cdot v^t$.

(ii) $(\alpha v) \cdot w = v \cdot (\alpha w) = \alpha (v \cdot w)$.

(iii) $v \cdot (w_1 + w_2) = v \cdot w_1 + v \cdot w_2$.

(iv) $(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w$.

Definición 1.15 (Producto de matrices). Sean $A = (a_{ij})_{n \times p} \in M(n, p; \mathbb{R})$ y $B = (b_{ij})_{p \times m} \in M(p, m; \mathbb{R})$. La matriz $AB = (c_{ij})_{n \times m}$, llamada producto de A y B, es una matriz en $M(n, m; \mathbb{R})$ tal que cada una de sus entradas c_{ij} está dada por el siguiente producto escalar:

$$c_{ij} = (\text{Fila } i \text{ de } A) \cdot (\text{Columna } j \text{ de } B)$$

Observación 1.16. Explicitamente, la fórmula para la entrada c_{ij} del producto AB es:

$$c_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}$$

Comentario 1.17. El producto de matrices no siempre es conmutativo, es decir, en general $AB \neq BA$.

Proposición 1.18. El producto de matrices, siempre que esté definido, cumple con:

(i) $A(BC) = (AB)C$

(ii) $A(B + C) = AB + AC$

(iii) $(A + B)C = AC + BC$

(iv) $I_n A = A = A I_m$.

(v) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

(vi) $(AB)^t = B^t A^t$.

(vii) $AB + \alpha A = A(B + \alpha I)$.

(viii) $AB + \beta B = (A + \beta I)B$.

Comentario 1.19. Sea $C \in M(1, n; \mathbb{R})$ y $A \in M(n, m; \mathbb{R})$. Si $f_1, \dots, f_n$ son las filas de A entonces

$$CA = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = c_{11} f_1 + \cdots + c_{1n} f_n$$

Indicando que el producto $CA \in M(1, m; \mathbb{R})$ se puede interpretar como el vector fila que es resultado de la combinación lineal de las filas de A, usando las entradas de C como coeficientes. Así, el resultado de un producto de matrices BA, donde $B \in M(q, n; \mathbb{R})$, se puede ver como el recuento de hacer combinaciones lineales con las filas de A, una combinación por cada fila de B.

En la situación reflejo, es decir, cuando $D \in M(m, 1; \mathbb{R})$ y $c_1, \dots, c_m$ son las columnas de A, se tiene:

$$AD = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ d_{m1} \end{pmatrix} = d_{11} c_1 + \cdots + d_{m1} c_m$$

Esto dice que el resultado es una combinación lineal de las columnas de A. Cuando se tiene un producto AB, con $B \in M(m, r; \mathbb{R})$, el resultado sería un recuento de combinaciones lineales de columnas de A, determinadas por las columnas de B.

1.3. Referencias Útiles

Para estudiar la materia

- Del libro [ACG14], secciones: 2.1, 2.2, 2.3, 2.4.
- Del libro [GF12], secciones: 2.1, 2.2.

Ejercicios recomendados

- Del libro [ACG14], sección 2.8 Ejercicios: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 44 y 46.

1.4. Ejercicios Matrices

1.1. En cada caso escriba la matriz especificada e indique que con cuáles tipos de la definición 1.2 encaja.

(a) $A = (a_{i,j})_{3\times 3}$ tal que $a_{i,j} = (-1)^i$.

(b) $A = (a_{i,j})_{3\times 4}$ tal que $a_{i,j} = (-1)^{i+j}$.

(c) $A = (a_{i,j})_{2\times 2}$ tal que $a_{i,j} = (-1)^{ij}$

(d) $B = (b_{i,j})_{3\times 3}$ tal que $b_{i,j} = 2i + j - 1$.

(e) $B = (b_{i,j})_{4\times 4}$ tal que $b_{i,j} = i - j$.

(f) $C = (c_{i,j})_{3\times 3}$ tal que $c_{i,j} = (j-1)(j-3)i$.

(g) $D = (c_{i,j})_{4\times 4}$ tal que $d_{i,j} = (i-1)(i-2)\cdot(i-4)(j-1)(j-4)$.

(h) $D = (c_{i,j})_{2\times 2}$ tal que $c_{i,j} = (2-i)(a(2-j) + b(j-1)) + (i-1)(c(2-j) + d(j-1))$.

1.2. Escriba una versión para matrices 3×3 de la parte **(h)** del ejercicio 1.1.

1.3. Realice los siguientes cálculos para $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -5 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -5 \\ 8 & -5 & -8 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -6 & -7 & -2 \\ -8 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(a) $2A + B - 2C$

(b) $2(A - B) + 3C$

(c) $A^t + 2(B + C)^t$

(d) $(A + B + I)^t - (B + C + I)^t$

1.4. En cada caso escriba dos ejemplos de matrices que cumplan con la condición respectiva.

(a) $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ tal que $a_{ij} = 0$ si $i = j$.

(b) $C = (c_{ij})_{3\times 4}$ tal que $c_{ij} = -c_{i+1,j}$.

(c) $C = (c_{ij})_{2\times 2}$ tal que $c_{11}c_{22} = c_{12}c_{21} + 1$.

(d) $E = (e_{ij})_{3\times 3})$ tal que $e_{1j} + e_{2j} + e_{3j} = \frac{1}{j}$.

(e) $B = (b_{ij})_{2\times 4}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i > j \\ 3 & \text{si } i < j \end{cases}$

(f) $D = (d_{ij})_{3\times 4}$ tal que $d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ d_{i+1,j+1} & \text{si } i = j \end{cases}$

1.5. Muestre cada una de las siguientes propiedades del álgebra de matrices.

(a) A es simétrica si y sólo si $A^t = A$.

(b) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $A(B + C) = AB + AC$.

(d) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

1.6. Haga los cálculos en cada caso con $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 0 & -9 & 7 \\ 9 & 4 & -9 \end{pmatrix}$

(a) $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + I$

(c) $(A - xI)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} x & y & x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$

1.7. Calcule las siguientes potencias de matrices.

(a) $\begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}^6$

(b) $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}^3$

1.8. Realize los siguientes cálculos.

(a) $AB - BA$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) $A^3B^4 + A^4B^5 - 2A^5B^6$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $(2A + B)^t - (2B - A)^t + A^2$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $b \neq 0$.

(d) $(I + A + A^2)(I - A)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.9. En cada caso determine las incognitas.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 12 \end{pmatrix}$

1.5. Soluciones Matrices

1.1. R/

(a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(f)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **(g)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(h)** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1.2. R/ Si $A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ entonces para todo $i, j \in \{1,2,3\}$ se tiene que: $a_{i,j} = \frac{1}{2}(2-i)(3-i)(\frac{1}{2}a(2-j)(3-j) + b(j-1)(3-j) + \frac{1}{2}c(j-1)(j-2)) + (i-1)(3-i)(\frac{1}{2}d(2-j)(3-j) + e(j-1)(3-j) + \frac{1}{2}f(j-1)(j-2)) + \frac{1}{2}(i-1)(i-2)(\frac{1}{2}g(2-j)(3-j) + h(j-1)(3-j) + \frac{1}{2}k(j-1)(j-2))$.

1.3. R/

(a) $\begin{pmatrix} -14 & -9 & -14 \\ 0 & 5 & -5 \\ 26 & -9 & -14 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 22 \\ -24 & -27 & 0 \\ -38 & 21 & 0 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 11 & -21 & 8 \\ 3 & -20 & -16 \\ 8 & -3 & -25 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} -5 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

1.4. R/

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 2 \\ -4 & 1 & -2/3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(e)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ **(f)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.5. R/ Se toma $A = (a_{i,j})$ y $B = (b_{i,j})$.

(a) $A = A^t$ si y solo si $a_{i,j} = a_{j,i}$ para todo i, j, que es la definición de ser simétrica.

(b) Tome $\alpha(A+B) = (c_{i,j})$ y $\alpha A + \alpha B = (d_{i,j})$. Ahora $c_{i,j} = \alpha(a_{i,j} + b_{i,j}) = \alpha a_{i,j} + \alpha b_{i,j} = d_{i,j}$ para todo i, j, por lo tanto $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

(c) Tome $A(B+C) = (l_{i,j})$ y $AB + AC = (r_{i,j})$.

Entonces se tiene que $l_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,j} + c_{1,j} & \cdots & b_{m,j} + c_{m,j} \end{pmatrix}^t = a_{i,1}(b_{1,j} + c_{1,j}) + \cdots + a_{i,m}(b_{m,j} + c_{m,j}) = (a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,1}c_{1,j}) + \cdots + (a_{i,m}b_{m,j} + a_{i,m}c_{m,j}) = (a_{i,1}b_{1,j} + \cdots + a_{i,m}b_{m,j}) + (a_{i,1}c_{1,j} + \cdots + a_{i,m}c_{m,j}) = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,j} & \cdots & b_{m,j} \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1,j} & \cdots & c_{m,j} \end{pmatrix}^t = r_{i,j}$, lo que muestra la igualdad.

(d) La entrada (i,j) de $(A+B)^t$ es la entrada (j,i) de $A+B$, es decir, $a_{j,i} + b_{j,i}$, y esta es justamente la entrada (i,j) de $A^t + B^t$.

1.6. R/

(a) $\begin{pmatrix} 31 & 8 & -42 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 6x+9y+2z+1 \\ -9y+7z+1 \\ 9x+4y-9z+1 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 17-x \\ -2-x \\ 4-x \end{pmatrix}$ **(d)** $8x^2 + 20xy - 9y^2$

1.7. R/

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} x^3 & 0 & 0 \\ 0 & y^3 & 0 \\ 0 & 0 & z^3 \end{pmatrix}$

1.8. R/

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -a/b & 3 & 0 \\ a & a^2+3a+b-1 & ab+3 \\ 1 & a+3b & b-1 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.9. R/

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -9 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

CAPÍTULO 2

Sistemas de Ecuaciones Lineales

2.1. Sistemas Lineales

Definición 2.1. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_m$ variables de números reales. Una *combinación lineal de las variables* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ es una expresión de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m$, donde $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Una *ecuación lineal en las variables* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ es una ecuación de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b$, donde $b, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Una *solución de una ecuación lineal* $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b$, es una m-tupla de números reales $(s_1, \ldots, s_m)$ tal que al hacer las sutituciones $x_1 = s_1, \ldots, x_m = s_m$, la igualdad $a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ms_m = b$ es satisfecha.

Definición 2.2 (Sistema de ecuaciones lineales). Un *sistema de ecuaciones lineales* de tamaño $n \times m$ es un conjunto de n ecuaciones lineales en m variables reales. Usando las variables $x_1, \ldots, x_m$, un sistema $n \times m$ se escribe

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

Se llama *matriz del sistema* a la matriz A de tamaño $n \times m$ formada por los coeficientes de las variables de las ecuaciones.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Se llama *matriz aumentada del sistema* a la matriz de tamaño $n \times (m+1)$ que se obtiene al adjuntarle a la matriz del sistema una columna adicional formada por los números $b_1, \ldots, b_n$. Usualmente se denota $(A|b)$.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{array}\right)$$

Definición 2.3. Una *solución de un sistema de ecuaciones lineales* $n \times m$ es una m-tupla $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ de números reales que es solución de cada una de las ecuaciones del sistema. El *conjunto solución* *de un sistema de ecuaciones lineales* $n \times m$ es el conjunto S que contiene a todas las m-tuplas que son solución del sistema. Un sistema de ecuaciones lineales $n \times m$ se dice *consistente* si su conjunto solución no es vacío, es decir, que existe al menos una solución del sistema. Un sistema de ecuaciones lineales $n \times m$ se dice *inconsistente* si su conjunto solución es vacío, es decir, no existe ninguna m-tupla que sea solución de todas las ecuaciones del sistema. A los sistemas inconsistentes también se les conoce como *sistemas de solución vacía*.

DEFINICIÓN 2.4 (Sistema homogéneo). Un *sistema homogéneo de ecuaciones lineales* de tamaño $n \times m$ es un conjunto de n ecuaciones lineales, todas igualadas a cero, en m variables reales. Usando las variables $x_1, \dots, x_m$, un sistema $n \times m$ homogéneo se escribe

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}x_m & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2m}x_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}x_m & = & 0 \end{array}\right.$$

PROPOSICIÓN 2.5. Todos los sistemas homogéneos de sistemas de ecuaciones lineales son consistentes, es decir, siempre tienen solución.

Demostración. Si el sistema es de tamaño $n \times m$, la m-tupla formada solamente por ceros satisface todas las ecuciones del sistema. $\square$

OBSERVACIÓN 2.6. Un sistema como el de la definición 2.2 se puede escribir usando multiplicación de matrices como $AX = b$, donde A es la matriz del sistema, X es la matriz $m \times 1$ formada por las variables y b la matriz $1 \times m$ formada por los números $b_1, \dots, b_m$.

$$AX = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

De esta forma, para verificar si una m-tupla $X_0 = (s_1, \dots, s_m)^t$ es una solución del sistema $AX = b$, se hace la multiplicación de matrices AX_0 y se comprueba que da como resultado b.

2.2. Métodos de Resolución

DEFINICIÓN 2.7. Dos sistemas de ecuaciones lineales se dicen *equivalentes* si sus conjuntos de soluciones son iguales.

DEFINICIÓN 2.8. Para un sistema $n \times m$, se definen tres tipos de operaciones elementales sobre sus ecuaciones o filas.

(I) Multiplicar una fila por un escalar no nulo: Sea $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$, la fila i del sistema, denotada f_i, se modifica multiplicando cada uno de sus coeficientes por el número real α.

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{im}x_m & = b_i \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m & = b_n \end{array}\right. \xrightarrow{\alpha f_i} \left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha a_{i1}x_1 + \cdots + \alpha a_{im}x_m & = \alpha b_i \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m & = b_n \end{array}\right.$$

(II) Sumarle una fila a otra fila: Se modifica la fila i del sistema, sumándole a cada uno de sus coeficientes los coeficientes respectivos de la fila j. La fila j no se modifica.

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m & =b_1\\ \vdots & \vdots\\ a_{i1}x_1+\cdots+a_{im}x_m & =b_i\\ \vdots & \vdots\\ a_{j1}x_1+\cdots+a_{jm}x_m & =b_j\\ \vdots & \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m & =b_n \end{array}\right. \xrightarrow{f_i+f_j} \left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m & =b_1\\ \vdots & \vdots\\ (a_{i1}+a_{j1})x_1+\cdots+(a_{im}+a_{jm})x_m & =b_i+b_j\\ \vdots & \vdots\\ a_{j1}x_1+\cdots+a_{jm}x_m & =b_j\\ \vdots & \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m & =b_n \end{array}\right.$$

(iii) Intercambiar dos filas: Se intercambia la posición de la fila i con la de la fila j. El sistema sigue teniendo las mismas ecuaciones pero en diferente orden.

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m & =b_1\\ \vdots & \vdots\\ a_{i1}x_1+\cdots+a_{im}x_m & =b_i\\ \vdots & \vdots\\ a_{j1}x_1+\cdots+a_{jm}x_m & =b_j\\ \vdots & \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m & =b_n \end{array}\right. \xrightarrow{f_i\leftrightarrow f_j} \left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m & =b_1\\ \vdots & \vdots\\ a_{j1}x_1+\cdots+a_{jm}x_m & =b_j\\ \vdots & \vdots\\ a_{i1}x_1+\cdots+a_{im}x_m & =b_i\\ \vdots & \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m & =b_n \end{array}\right.$$

(iv) Sumarle a una fila un múltiplo de otra fila: Sea $\alpha\in\mathbb{R}$, esta operación modifica la fila i sumándole el producto de la fila j por α. La fila j no resulta modificada.

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m & =b_1\\ \vdots & \vdots\\ a_{i1}x_1+\cdots+a_{im}x_m & =b_i\\ \vdots & \vdots\\ a_{j1}x_1+\cdots+a_{jm}x_m & =b_j\\ \vdots & \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m & =b_n \end{array}\right. \xrightarrow{f_i+\alpha f_j} \left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m & =b_1\\ \vdots & \vdots\\ (a_{i1}+\alpha a_{j1})x_1+\cdots+(a_{im}+\alpha a_{jm})x_m & =b_i+\alpha b_j\\ \vdots & \vdots\\ a_{j1}x_1+\cdots+a_{jm}x_m & =b_j\\ \vdots & \vdots\\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m & =b_n \end{array}\right.$$

Observación 2.9. Usando las matrices extendidas de los sistemas, las operaciones elementales de fila de la definición 2.8 se ven de la siguiente manera:

(i) Multiplicar una fila por un escalar no nulo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{im} & b_i\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{array}\right) \xrightarrow{\alpha f_i} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{im} & \alpha b_i\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{array}\right)$$

(ii) Sumarle una fila a otra fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{im} & b_i\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{jm} & b_j\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{array}\right) \xrightarrow{f_i+f_j} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{i1}+a_{j1} & \cdots & a_{im}+a_{jm} & b_i+b_j\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{jm} & b_j\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{array}\right)$$

(iii) Intercambiar dos filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} & b_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jm} & b_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{array}\right) \xrightarrow{f_i \leftrightarrow f_j} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jm} & b_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} & b_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{array}\right)$$

(iv) Sumarle a una fila un múltiplo de otra fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} & b_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jm} & b_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{array}\right) \xrightarrow{f_i + \alpha f_j} \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & \cdots & a_{im} + \alpha a_{jm} & b_i + \alpha b_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jm} & b_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{array}\right)$$

Teorema 2.10. Las operaciones de fila no modifican el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, es decir, transforman los sistemas lineales en otros que son equivalentes.

Definición 2.11. Una matriz $A \in M(n, m; \mathbb{R})$ se dice *escalonada* si cumple con las siguientes condiciones:

(i) Todas sus filas nulas, si tiene, son las últimas de arriba hacia abajo.

(ii) En las filas no nulas, la primera entrada no nula de izquierda a derecha es un 1. A este 1 se le conoce como el *pivote* de la fila.

(iii) Todos los pivotes de la matriz están en columnas diferentes.

(iv) La fila con el pivote más a la izquierda aparece de primera.

(v) La fila con el pivote más a la derecha aparece de última, antes de las filas nulas.

(vi) Si hay dos filas no nulas consecutivas, la primera tiene su pivote más a la izquierda que la segunda, y nunca uno sobre otro.

Proposición 2.12. Si la matriz aumentada de un sistema es escalonada y su última columna tiene un pivote, entonces este sistema es inconsistente.

Demostración. La ecuación donde está ese pivote es necesariamente $0 = 1$, la cual es imposible de satisfacer. □

Proposición 2.13 (Sustitución Hacia Atrás). Considere un sistema $n \times m$ en variables $x_1, \ldots, x_m$ tal que su matriz aumentada sea escalonada. Entonces si ningún pivote aparece en la última columna, una solución $(s_1, \ldots, s_m)$ se encuentra de la siguiente manera:

$\boxed{\text{Paso 1:}}$ En cada una de las ecuaciones despeje la variables asociadas a los pivotes.

$\boxed{\text{Paso 2:}}$ Dé cualquier valor (número real) a las variables que no tienen un pivote como coeficiente.

$\boxed{\text{Paso 3:}}$ Para la variable del primer pivote de abajo hacia arriba, tome el valor que da la sustitución de los valores del paso anterior.

$\boxed{\text{Paso 4:}}$ Para la siguiente variable con pivote, que está arriba de la anterior, tome el valor que da la sustitución de los valores de los pasos anteriores.

$\boxed{\text{Paso 6:}}$ Repita hasta llegar a la primera ecuación.

Proposición 2.14 (Método de Gauss). El siguiente algoritmo modifica la matriz aumentada $(A|b)$ de un sistema de ecuaciones $AX = b$ hasta llegar una matriz escalonada cuyo sistema asociado sea equivalente al original.

$\boxed{\text{Paso 1:}}$ De izquierda a derecha detengase en la primera columna no nula. Si no hay columnas no nulas termine.

$\boxed{\text{Paso 2:}}$ De arriba a abajo detengase en la primera entrada no cero de esta columna. Divida la fila de esta entrada por el número en ella. Este es el primer pivote de la matriz.

$\boxed{\text{Paso 3:}}$ Intercambie la fila del pivote con la fila 1 de la matriz.

$\boxed{\text{Paso 4:}}$ Usando la fila donde está el pivote, que en este caso ahora es f_1, elimine los elementos no nulos de la columna del pivote que se encuentren por debajo de este. En este paso se usa la operación de fila del tipo $f_i + \alpha f_1$.

$\boxed{\text{Paso 5:}}$ Considere la submatriz inferior derecha limitada por la fila y columna del pivote anterior. Si no hay tal submatriz, termine.

$\boxed{\text{Paso 6:}}$ Repita los pasos anteriores en esta submatriz. Continúe repitiendo este proceso hasta no tener tal submatriz o hasta que esta submatriz sea una matriz nula.

Además, una vez terminado el proceso, si la matriz aumentada del sistema resultante no tiene un pivote en la última columna, entonces una solución se encuentra aplicando el método de sustitución hacia atrás.

Teorema 2.15. Todo sistema de ecuaciones lineales es equivalente a un sistema cuya matriz aumentada es escalonada. Sin embargo, no es equivalente a un único sistema de esta forma.

Definición 2.16 (Matriz Escalonada Reducida). Una matriz $A \in M(n, m; \mathbb{R})$ se dice *escalonada reducida* si es escalonada y además satisface que en las columnas donde aparezcan los pivotes, arriba y abajo del pivote, las entradas son cero.

Observación 2.17. Toda matriz escalonada reducida es una matriz escalonada.

Proposición 2.18. Considere un sistema $n \times m$ en las variables $x_1, \dots, x_m$, tal que su matriz aumentada sea escalonada reducida. Entonces si ningún pivote aparece en la última columna, una solución $(s_1, \dots, s_m)$ del sistema se encuentra de la siguiente manera:

$\boxed{\text{Paso 1:}}$ En cada una de las ecuaciones despeje las variables asociadas a los pivotes.

$\boxed{\text{Paso 2:}}$ Dé cualquier valor a las variables que no tienen un pivote como coeficiente.

$\boxed{\text{Paso 3:}}$ Para las variables con pivote, tome el valor que da la sustitución del paso anterior.

Proposición 2.19 (Método de Gauss-Jordan). El siguiente algoritmo modifica la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones hasta llegar a una matriz escalonada reducida cuyo sistema de ecuaciones es equivalente al original.

$\boxed{\text{Paso 1:}}$ De izquierda a derecha detengase en la primera columna no nula. Si no hay columnas no nulas termine.

$\boxed{\text{Paso 2:}}$ De arriba a abajo detengase en la primera entrada no cero de esta columna. Divida la fila de esta entrada por el número en ella. Este es el primer pivote de la matriz.

$\boxed{\text{Paso 3:}}$ Intercambie la fila del pivote con la fila 1 de la matriz.

$\boxed{\text{Paso 4:}}$ Usando la fila donde está el pivote, que en este caso ahora es f_1, elimine los elementos no nulos de la columna del pivote que se encuentren por debajo y arriba (si hay) de este. En este paso se usa la operación de fila del tipo $f_i + \alpha f_1$.

$\boxed{\text{Paso 5:}}$ Considere la submatriz inferior derecha limitada por la fila y columna del pivote anterior. Si no hay tal submatriz, termine.

$\boxed{\text{Paso 6:}}$ Repita los pasos anteriores en esta submatriz. Continúe repitiendo este proceso hasta no tener tal submatriz o hasta que esta submatriz sea una matriz nula.

Además, una vez terminado el proceso, si la matriz aumentada del sistema resultante no tiene un pivote en la última columna, entonces una solución se encuentra aplicando la proposición 2.18.

Teorema 2.20. *Todo sistema de ecuaciones lineales es equivalente a un único sistema cuya matriz aumentada es escalonada reducida.*

2.3. Tipos de Soluciones

Definición 2.21. Para un sistema homogéneo, la solución cuyas únicas entradas son cero, se le conoce como *solución trivial*.

Proposición 2.22. *Si un sistema homogéneo de ecuaciones lineales tiene una solución no trivial, entonces este sistema tiene infinitas soluciones.*

Demostración. Sea $(s_1, \ldots, s_m)$ una solución no trivial del sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m & = 0 \end{array}\right.$$

entonces para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, la m-tupla $(\alpha s_1, \ldots, \alpha s_m)$ también es solución del sistema. En efecto, al sustituir en cualquier fila se tiene $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{im}x_m = a_{i1}\alpha s_1 + \cdots + a_{im}\alpha s_m = \alpha(a_{i1}s_1 + \cdots + a_{im}s_m) = \alpha \cdot 0 = 0$. □

Proposición 2.23. *Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales sólamente tiene dos estados: o tiene como única solución a la solución trivial o tiene infinitas soluciones.*

Proposición 2.24. *Si un sistema de ecuaciones lineales tiene al menos dos soluciones diferentes, entonces tiene infinitas soluciones.*

Demostración. Sean $r = (r_1, \ldots, r_m)$ y $s = (s_1, \ldots, s_m)$ dos soluciones diferentes del sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m & = b_n \end{array}\right.$$

Al ser r y s diferentes, la m-tupla $(r_1 - s_1, \ldots, r_m - s_m)$ es una solución no nula del sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m & = 0 \end{array}\right.$$

En efecto, al hacer la sustitución en cualquier fila se obtiene $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{im}x_m = a_{i1}(r_1 - s_1) + \cdots + a_{im}(r_m - s_m) = (a_{i1}r_1 - a_{i1}s_1) + \cdots + (a_{im}r_m - a_{im}s_m) = (a_{i1}r_1 + \cdots + a_{im}r_m) - (a_{i1}s_1 + \cdots + a_{im}s_m) =$

$b_i - b_i = 0$. Por la proposición 2.22, para cualquier número real α la m-tupla $\alpha(r-s)$ es solución del sistema homogéneo, y de manera similar se verifica que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, la m-tupla $r + \alpha(r-s)$ es solución del sistema original. □

PROPOSICIÓN 2.25. Un sistema de ecuaciones lineales tiene sólamente uno de los siguientes tres estados: solución vacía, solución única o inifinitas soluciones.

COMENTARIO 2.26. Un sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones justamente cuando, luego de aplicar el método de Gauss-Jordan, al menos una de las variables no tiene como coeficiente un pivote. Esto se debe a que al darle a una variable así cualquier valor real siempre se llega a una solución del sistema. En estos casos, al describir el conjunto solución del sistema, toda variable que no tenga pivote se ve como un parámetro y la solución puede escribirse en términos de todas las variables de este tipo.

PROPOSICIÓN 2.27. Si el conjunto solución de un sistema tiene p parámetros, $t_1, \dots, t_p$, entonces toda solución del sistema se puede escribir en la siguiente forma: $s + t_1 v_1 + \cdots + t_p v_p$, donde s es una solución particular del sistema y v_1 hasta v_p son todas soluciones del sistema homogéneo asociado al sistema original.

2.4. Rango y Nulidad de una Matriz

PROPOSICIÓN 2.28. Considere las operaciones elementales de fila descritas en la observación 2.9. Entonces cada una de las operaciones elementales de fila son reversibles, es decir, existe otra operación elemental de fila, que al aplicarla al resultado se obtiene la matriz inicial.

Demostración. En cada caso se da la operación elemental que revierte el proceso.

(I) Multiplicar una fila por un escalar no nulo: $A \xrightarrow{\alpha f_i} B$ se revierte con $B \xrightarrow{\frac{1}{\alpha} f_i} A$.

(II) Sumar una fila a otra fila: $A \xrightarrow{f_i + f_j} B$ se revierte con $B \xrightarrow{f_i - f_j} A$.

(III) Intercambiar dos filas: $A \xrightarrow{f_i \leftrightarrow f_j} B$ se revierte con $B \xrightarrow{f_i \leftrightarrow f_j} A$.

(IV) Sumarle a una fila un múltiplo de otra fila: $A \xrightarrow{f_i + \alpha f_j} B$ se revierte con $B \xrightarrow{f_i - \alpha f_j} A$.

□

DEFINICIÓN 2.29. Dos matrices $A, B \in M(n, m; \mathbb{R})$ se dicen equivalentes si y solamente si B se obtiene a partir de A luego de aplicarle una cantidad finita de operaciones elementales de fila.

PROPOSICIÓN 2.30. Toda matriz $A \in M(n, m; \mathbb{R})$ es equivalente a una única matriz escalonada reducida. Nos referimos a esta matriz como la *forma escalonada reducida* de A.

DEFINICIÓN 2.31. Sea $A \in M(n, m; \mathbb{R})$. Se define el *rango* de la matriz A como el número de filas no nulas de su forma escalonada reducida. Se usa la notación $\mathrm{Rng}(A)$.

OBSERVACIÓN 2.32. Se puede demostrar que $\mathrm{Rng}(A) = \mathrm{Rng}(A^t)$.

DEFINICIÓN 2.33. Se define la *nulidad* de una matriz $A \in M(n, m; \mathbb{R})$ como la cantidad de parámetros de la solución del sistema homogéneo asociado a A, es decir $AX = 0$. Se usa la notacion $\mathrm{Nul}(A)$.

OBSERVACIÓN 2.34. Más adelante se verá otra forma equivalente de definir el rango y la nulidad de una matriz.

TEOREMA 2.35. Para toda $A \in M(n, m; \mathbb{R})$ se cumplen las siguientes afirmaciones:

(I) El número de columnas de A es mayor o igual al rango de A: $m \geq \mathrm{Rang}(A)$.

(II) El número de columnas de A es igual al rango más la nulidad: $m = \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Nul}(A)$.

Teorema 2.36. Las siguientes afirmaciones son ciertas para todo sistema de ecuaciones lineales $AX = b$ de tamaño $n \times m$ con matriz de coeficientes A y matriz aumentada $(A|b)$.

(i) El rango de A siempre es menor o igual al rango de $(A|b)$.

(ii) $AX = b$ es de solución vacía si y solo si $\mathrm{Rng}\,(A) \neq \mathrm{Rng}\,(A|b)$.

(iii) $AX = b$ tiene solución única si y solo si $\mathrm{Rng}\,(A) = \mathrm{Rng}\,(A|b) =$ número de columnas de A.

(iv) $AX = b$ tiene solución única si y solo si $\mathrm{Nul}\,(A) = 0$ y $\mathrm{Nul}\,(A|b) = 1$.

(v) Si A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, $AX = b$ tiene solución única si y solo si A es equivalente a la matriz identidad I_n.

(vi) $AX = b$ tiene infinitas soluciones si y solo si $\mathrm{Rng}\,(A) = \mathrm{Rng}\,(A|b) <$ número de columnas de A.

(vii) Si $AX = b$ tiene infinitas soluciones entonces su conjunto solución depende de $m - \mathrm{Rng}\,(A) = \mathrm{Nul}\,(A)$ parámetros.

2.5. Referencias Útiles

Para estudiar la materia

- Del libro [ACG14], secciones: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6.
- Del libro [GF12], secciones: 1.1, 1.2.

Ejercicios recomendados

- Del libro [ACG14], sección 1.8 Ejercicios: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25.

2.6. Ejercicios Sistemas de Ecuaciones Lineales

2.1. Resuelva los siguientes sistemas usando el método de Gauss.

(a) $$\begin{cases} 5x_1 \qquad\quad - 5x_3 \qquad\quad = 0 \\ \qquad 3x_2 + 3x_3 - \ 9x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 10x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 10x_4 = 0 \\ -2x_1 \qquad + 2x_3 - \quad x_4 = -1 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 15x_4 = 3 \\ \qquad x_2 - 3x_3 - \ 3x_4 = -9 \\ 3x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 15x_4 = -6 \\ \quad - 2x_2 + 6x_3 + \ 7x_4 = 18 \\ -3x_1 + 5x_2 + \ x_3 - 22x_4 = -12 \end{cases}$$

2.2. En cada caso, escriba la matriz de coeficientes A y la matriz aumentada del sistema $(A|b)$. Calcule el rango de ambas.

(a) $$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + \ z = -\frac{2}{3} \\ \qquad y - \frac{7}{2}z = 0 \\ x - \frac{4}{3}y + \ z = 1 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} ax \ + y + z = 0, \qquad a \in \mathbb{R} \\ \ x - y + z = 0 \end{cases}$$

2.3. Encuentre la forma escalonada reducida de las siguientes matrices

(a) $$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 2 & -9 & 13 & -11 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 4 & -9 & -17 \\ -2 & 6 & 10 \\ 2 & 8 & 4 \\ 7 & 1 & -13 \end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix} 9 & 27 & 1 \\ 4 & 12 & -4 \\ -10 & -30 & -5 \end{pmatrix}$$

(d) $$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & -2 \\ -4 & -6 & -9 & -33 \\ -10 & 0 & 2 & -28 \\ 0 & -2 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

2.4. Dé un sistema de ecuaciones cuya matriz aumentada sea la forma escalonada reducida de las siguientes matrices

(a) $$\begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 4 \\ -4 & -4 & -5 & -5 \\ -3 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & -9 & 5 \\ -6 & 12 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

2.5. Muestre que las siguientes matrices son equivalentes usando la reducción de Gauss-Jordan.

(a) $$A = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 20 \\ -10 & 2 & 7 & 15 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -6 & -19 \\ 1 & -7 & -6 & -31 \\ 3 & 0 & -6 & -15 \end{pmatrix}$$

(b) $$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 & 30 \\ 3 & 0 & -6 & -6 \\ -4 & 0 & -4 & -16 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & -2 & -12 \\ 1 & 0 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

(c) $$A = \begin{pmatrix} -10 & -5 & -10-5x \\ -1 & -2 & -1-2x \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -5+5x \\ -8 & -6 & -8-6x \end{pmatrix}$$

(d) $$A = \begin{pmatrix} -8x & 6x & 3 & -2-2x \\ 3x & 12x & 6 & 7+7x \\ -7x & -4x & -2 & -8-8x \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -7x & 6x & 3 & -4-4x \\ x & 14x & 7 & -3-3x \\ x & 0 & 0 & 8+8x \end{pmatrix}$$

2.6. Para cada sistema calcule el rango de su matriz asociada A y aumentada $(A|b)$y la nulidad de A. Determine si el sistema no tiene solución, tiene solución única o infinitas soluciones. En el último caso indique la cantidad de parámetros. Escriba el conjunto de soluciones.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -8 & -5 & -6 \\ 5 & -6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 8 \\ 4 & -6 & 3 \\ -9 & -7 & -5 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -7 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} -9 & 5 & -4 \\ -8 & -9 & -17 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -9 & 9 & -9 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & -4 \\ -4 & 4 & -4 & -8 \\ 3 & -3 & 3 & 6 \\ 9 & -9 & 9 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

2.7. Para cada sistema encuentre valores para a de tal manera que el sistema sea inconsistente, tenga solución única y tenga infinitas soluciones. En los casos donde haya consistencia, escriba el conjunto solución.

(a) $\begin{cases} -6x - 4y + 6az = 8 \\ 5x + 3y + 3az = -7 \\ -10x + 2y + 7az = 22 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -9x + (-4+4a)y - 6z = 1 \\ x + (7-7a)y - 6z = 0 \\ 3x - 6z = 9 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 7x - 4y + (7-4a)z = 11 \\ 3x + 8y + (3+8a)z = -5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -6x + -3ay + (-3-3a)z = -3 \\ -4x + -5ay + (1-5a)z = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} ax + (-1+a)y + (10-5a)z = 0 \\ -ax + (-4+2a)z = 0 \\ -4ax + (2-2a)y + (4-2a)z = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} (-8+8a)x + (3-a)y = 0 \\ (10-10a)x + (15-5a)y = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} -2x + (-10+5a)y + (-9+3a)z = 14 \\ -5x + (12-6a)y + (21-7a)z = -35 \\ -8x + (16-8a)y + (-9+3a)z = -37 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} ax + (1+a)y + (8+4a)z = 3 \\ -8ax + (-8-8a)y + (-10-5a)z = 3 \end{cases}$

2.8. En cada caso determine los valores de a para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones con un parámetro y escriba el conjunto solución.

(a) $\begin{pmatrix} 1+a & 8-8a & 0 & -8a & -9 \\ -1-a & 5-5a & -18+9a & -5a & 4 \\ -6-6a & -7+7a & -4+2a & 7a & -2 \\ 6+6a & -6+6a & -18+9a & 6a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 3 \\ 21 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1+a & 2+a & 10+5a & -2+5a \\ 1-a & -2-a & 18+9a & -6+9a \\ -5+5a & 10+5a & 12+6a & 8+6a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.9. Para cada sistema encuentre valores para a y b de tal manera que el sistema sea inconsistente, tenga solución única y tenga infinitas soluciones. En los casos consistentes, escriba el conjunto solución.

(a) $\begin{cases} 6ax + 9by = 15 \\ -8ax + 3by = -5 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} ax - y = -1 \\ bx - y = b \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (4a+8)x + (-8b-16)y + 7bz = 0 \\ (3a+6)x + (-b-2)y + -5bz = 0 \\ (-2a-4)x + (-2b-4)y + -5bz = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} (a+1)x + ay = 1 \\ (a+1)x + (a+b)y = 2 \\ (a+1)x + ay = 1 \end{cases}$

2.7. Soluciones Sistemas de Ecuaciones Lineales

2.1. R/

(a) $\mathcal{S} = \varnothing$

(b) $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 0$

2.2. R/

(a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 1 & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$, $(A|b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{4}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{Rng}(A) = \mathrm{Rng}(A|b) = 3$.

(b) $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $(A|b) = \left(\begin{smallmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $\mathrm{Rng}(A) = \mathrm{Rng}(A|b) = 2$.

2.3. R/

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

(b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

(d) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

2.4. R/

(a) $\begin{cases} x + y & = 0 \\ \quad z & = 1 \\ \quad + 0 & = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - 2y + z & = 1 \\ \quad z & = 0 \\ \quad + 0 & = 1 \end{cases}$

2.5. R/ En cada caso ambas matrices son equivalentes por filas a la matriz

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$

(b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{smallmatrix}\right)$

(d) $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{smallmatrix}\right)$

2.6. R/

(a) $\mathrm{Rng}(A) = 3$, $\mathrm{Rng}(A|b) = 3$ y $\mathrm{Nul}(A) = 0$. El sistema tiene solución única y $\mathcal{S} = \{(30, 16, -20)^t\}$.

(b) $\mathrm{Rng}(A) = 3$, $\mathrm{Rng}(A|b) = 3$ y $\mathrm{Nul}(A) = 0$. El sistema tiene solución única y $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)^t\}$.

(c) $\mathrm{Rng}(A) = 1$, $\mathrm{Rng}(A|b) = 2$ y $\mathrm{Nul}(A) = 1$. El sistema no tiene solución y $\mathcal{S} = \varnothing$.

(d) $\mathrm{Rng}(A) = 3$, $\mathrm{Rng}(A|b) = 4$ y $\mathrm{Nul}(A) = 0$. El sistema no tiene solución y $\mathcal{S} = \varnothing$.

(e) $\mathrm{Rng}(A) = 1$, $\mathrm{Rng}(A|b) = 1$ y $\mathrm{Nul}(A) = 1$. El sistema tiene infinitas soluciones con 1 parámetro y el conjunto solución es $\mathcal{S} = \left\{ t \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$.

(f) $\mathrm{Rng}(A) = 2$, $\mathrm{Rng}(A|b) = 2$ y $\mathrm{Nul}(A) = 1$. El sistema tiene infinitas soluciones con 1 parámetro y el conjunto solución es $\mathcal{S} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$.

(g) $\mathrm{Rng}(A) = 1$, $\mathrm{Rng}(A|b) = 1$ y $\mathrm{Nul}(A) = 2$. El sistema tiene infinitas soluciones con 2 parámetros y el conjunto solución es $\mathcal{S} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + s \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) : t, s \in \mathbb{R} \right\}$.

(h) $\mathrm{Rng}(A) = 1$, $\mathrm{Rng}(A|b) = 1$ y $\mathrm{Nul}(A) = 3$. El sistema tiene infinitas soluciones con 3 parámetros y el conjunto solución es $\mathcal{S} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + s \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + r \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) : t, s, r \in \mathbb{R} \right\}$.

2.7. R/

(a) $\boxed{\text{Si } a \neq 0\text{:}}$ el sistema tiene solución única $\mathcal{S} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a = 0\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) $\boxed{\text{Si } a = 1\text{:}}$ el sistema no tiene soluciones $\mathcal{S} = \varnothing$.

$\boxed{\text{Si } a \neq 1\text{:}}$ el sistema tiene solución única $\mathcal{S} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1/(a-1) \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

(c) $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -a \\ 1 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$.

(d) $\boxed{\text{Si } a = 0\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a \neq 0\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1/a \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + t \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -(a-1)/a \\ 1 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$.

(e) $\boxed{\text{Si } a = 0\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a = 1\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ t \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a = 2\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ t \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a \neq 0,\ a \neq 1 \text{ y } a \neq 2\text{:}}$ el sistema tiene solución única $\mathcal{S} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

(f) $\boxed{\text{Si } a = 1\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a = 30\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a \neq 1 \text{ y } a \neq 3\text{:}}$ el sistema tiene solución única $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(g) $\boxed{\text{Si } a = 2\text{:}}$ el sistema no tiene soluciones $\mathcal{S} = \varnothing$.

$\boxed{\text{Si } a = 3\text{:}}$ el sistema no tiene soluciones $\mathcal{S} = \varnothing$.

$\boxed{\text{Si } a \neq 2 \text{ y } a \neq 3\text{:}}$ el sistema tiene tiene solución única $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3/(a-2) \\ 1/(a-3) \end{pmatrix} \right\}$.

(h) $\boxed{\text{Si } a = 0\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a = -2\text{:}}$ el sistema no tiene soluciones $\mathcal{S} = \varnothing$.

$\boxed{\text{Si } a \neq 0 \text{ y } a \neq -2\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/a \\ 0 \\ 1/(a+2) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -(1+a)/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

2.8. R/

(a) $\boxed{\text{Si } a = 1\text{:}}$ $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a \neq 1 \text{ y } a \neq 2\text{:}}$ $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/(a+1) \\ 1/(a-1) \\ 1/(a-2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -a/(a-1) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) $\boxed{\text{Si } a = 1\text{:}}$ $\mathcal{S} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a \neq 1 \text{ y } a \neq -2\text{:}}$ $\mathcal{S} = \left\{ t \begin{pmatrix} -(a+2)/(a-1) \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

2.9. R/

(a) $\boxed{\text{Si } a = 0\text{:}}$ el sistema no tiene soluciones $\mathcal{S} = \varnothing$.

$\boxed{\text{Si } a \neq 0 \text{ y } b = 0\text{:}}$ el sistema no tiene soluciones $\mathcal{S} = \varnothing$.

$\boxed{\text{Si } a \neq 0 \text{ y } b \neq 0\text{:}}$ el sistema tiene solución única $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/a \\ 1/b \end{pmatrix} \right\}$.

(b) $\boxed{\text{Si } a = 0\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a \neq 0 \text{ y } b = 0\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ t \begin{pmatrix} -(a+1)/a \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a \neq 0 \text{ y } b \neq 0\text{:}}$ el sistema tiene solución única $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) $\boxed{\text{Si } a = -2 \text{ y } b = -2\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 2 parámetros $\mathcal{S} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a = -2 \text{ y } b = 0\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 2 parámetros $\mathcal{S} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a = -2,\ b \neq -2 \text{ y } b \neq 0\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a \neq -2 \text{ y } b = -2\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a \neq -2 \text{ y } b = 0\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a \neq -2,\ b \neq -2 \text{ y } b \neq 0\text{:}}$ el sistema tiene solución única $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(d) $\boxed{\text{Si } a = -1 \text{ y } b \neq -1\text{:}}$ el sistema no tiene soluciones $\mathcal{S} = \varnothing$.

$\boxed{\text{Si } a = -1 \text{ y } b = -1\text{:}}$ el sistema tiene ∞ soluciones con 1 parámetro $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

$\boxed{\text{Si } a \neq -1 \text{ y } b = 0\text{:}}$ el sistema no tiene soluciones $\mathcal{S} = \varnothing$.

$\boxed{\text{Si } a \neq -1 \text{ y } b \neq 0\text{:}}$ el sistema tiene solución única $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} (b-a)/(ab+b) \\ 1/b \end{pmatrix} \right\}$.

CAPÍTULO 3

Matrices Invertibles

3.1. Inversa de una Matriz

PROPOSICIÓN 3.1. Sea $A \in M(n;\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Si existe $B \in M(n;\mathbb{R})$ tal que $AB = I_n$ entonces tambien existe $C \in M(n;\mathbb{R})$ tal que $CA = I_n$; es más, $C = B$.

DEFINICIÓN 3.2. Una matriz cuadrada $A \in M(n;\mathbb{R})$ se dice *invertible* si existe $C \in M(n;\mathbb{R})$ tal que $CA = I_n$. En tal caso, a la matriz C se le llama *matriz inversa* de A, y se denota A^{-1}.

OBSERVACIÓN 3.3. No todas las matrices cuadrada son invertibles, por ejemplo, cualquier matriz $A \in M(n;\mathbb{R})$ con una fila nula, no es invertible. En efecto, si A con estas condiciones fuese invertible entonces existiría B tal que $AB = I_n$. Esta igualdad dice que las filas de I_n deben ser combinación lineal de las filas de B con coeficientes definidos por las filas de A (ver comentario 1.19). En particular, la fila nula de A definiría una combinación lineal de filas de B que daría como resultado una fila de I_n. Pero esto no es posible, pues I_n no tiene filas nulas, y la fila nula de A solo daría como resultado una fila nula.

PROPOSICIÓN 3.4. Sea $AX = b$ un sistema de ecuaciones donde $A \in M(n;\mathbb{R})$. Entonces, $AX = b$ tiene solución única si y solamente si A es invertible. Además, dicha solución es $X = A^{-1}b$.

PROPOSICIÓN 3.5. $A \in M(n;\mathbb{R})$ es invertible si y solamente si A es equivalente a I_n.

Demostración. Es consecuencia de las proposiciones 3.4 y 2.36. □

PROPOSICIÓN 3.6. $A \in M(n;\mathbb{R})$ es invertible si y solo si $\operatorname{Rng}(A) = n$.

Demostración. Ser de rango n para una matriz $n \times n$ es lo mismo a ser equivalente a la matriz identidad. □

PROPOSICIÓN 3.7. Si $A, B \in M(n;\mathbb{R})$ son matrices invertibles entonces A^{-1}, A^t y AB son invertibles y sus inversas son:

(I) $(A^{-1})^{-1} = A$ (II) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. (III) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

PROPOSICIÓN 3.8 (Método para calcular inversas). Sea $A \in M(n;\mathbb{R})$. El siguiente método indica si la matriz A es o no invertible, y en el caso de que sea invertible da como resultado su matriz inversa A^{-1}.

$\boxed{\text{Paso 1:}}$ Escriba A y I_n en una sola matriz $(A|I_n)$.

$\boxed{\text{Paso 2:}}$ Aplique el método de Gauss-Jordan a $(A|I_n)$ para obtener la forma escalonada reducida de A. Aquí, toda operación de fila que se le aplique a A debe de aplicarse también a I_n.

$\boxed{\text{Paso 3:}}$ Se obtiene una matriz de la forma $(H|B)$, donde H es escalonada reducida. Si H no es la identidad entonces A no es invertible. Si $H = I_n$ entonces A es invertible y su inversa es B.

3.2. Matrices elementales

Definición 3.9. Se llaman *matrices elementales* a las matrices cuadradas que son de alguno de los siguientes tres tipos.

(i) Las que se obtienen al multiplicar la fila i de I_n por un real $\alpha \in \mathbb{R}$ no nulo. Se denotan $E_{\alpha f_i}$.

(ii) Se obtienen al sumarle a la fila i de I_n la fila j multiplicada por α, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Se denotan por $E_{f_i+\alpha f_j}$.

(iii) Son las que se obtienen de I_n al intercambiar la fila i con la fila j. Se denotan $E_{f_i\leftrightarrow f_j}$.

Proposición 3.10. Las matrices elementales son invertibles y sus inversas son también matrices elementales.

Demostración. Se verifica que $(E_{\alpha f_i})^{-1} = E_{\frac{1}{\alpha} f_i}$, $(E_{f_i+\alpha f_j})^{-1} = E_{f_i-\alpha f_j}$ y $(E_{f_i\leftrightarrow f_j})^{-1} = E_{f_i\leftrightarrow f_j}$. □

Proposición 3.11. Las operaciones elementales de fila sobre una matriz pueden ser expresadas usando multiplicaciones de matrices, es decir, si $A \in M(n,m;\mathbb{R})$ y $A \xrightarrow{f} B$, donde f es alguna de las operaciones elementales de fila, entonces existe una matriz $E_f \in M(n;\mathbb{R})$ invertible tal que $E_f \cdot A = B$.

Demostración. En efecto,

(i) Multiplicar una fila por un escalar $A \xrightarrow{\alpha f_i} B$ equivale a hacer el producto $E_{\alpha f_i} A = B$.

(ii) La suma a una fila un múltiplo de otra $A \xrightarrow{f_i+\alpha f_j} B$ es equivalente a $E_{f_i+\alpha f_j} A = B$.

(iii) El intercambio de filas $A \xrightarrow{f_i\leftrightarrow f_j} B$ equivale a hacer el producto $E_{f_i\leftrightarrow f_j} A = B$.

□

Observación 3.12. Al expresar una secuencia de operaciones de fila sobre una matriz como producto de matrices, las matrices elementales aparecen en el producto con un orden inverso al que tienen las operaciones elementales que representan. En otras palabras si $A \xrightarrow{f} \xrightarrow{g} B$, donde f,g son operaciones elementales de fila, entonces como producto de matrices este proceso se expresa $E_g E_f A = B$.

Comentario 3.13. El método para calcular la inversa de una matriz (proposición 3.8) se puede justificar usando matrices elementales. Sea $A \in M(n;\mathbb{R})$, y suponga que se le aplica el método de Gauss-Jordan para encontrar su forma escalonada reducida H. Esto produce una secuencia finita de operaciones de fila que se puede escribir como producto de matrices elementales

$$A \xrightarrow{e_1} \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_r} H \iff E_{e_r} \cdots E_{e_2} E_{e_1} A = H$$

Si A es invertible, H debe de ser I_n, por lo que se tendría $E_{e_r} \cdots E_{e_2} E_{e_1} A = I_n$. Lo cual dice que la inversa de A debe ser la matriz resultado de la multiplicación $E_{e_r} \cdots E_{e_2} E_{e_1}$. Y al ser cierto que $E_{e_r} \cdots E_{e_2} E_{e_1} = E_{e_r} \cdots E_{e_2} E_{e_1} I_n$, una forma sencilla de calcular este producto es ir aplicando las operaciones de fila respectivas a la matriz identidad I_n, que es justamente lo que indica el método.

Proposición 3.14. $A \in M(n;\mathbb{R})$ es invertible si y solo si A es producto de matrices elementales.

Proposición 3.15. Si $A \in M(n;\mathbb{R})$ entonces $\operatorname{Rng}(A) = \operatorname{Rng}(A^t)$.

Demostración. Ver Teorema 2.27 de [ACG14]. □

3.3. Idempotencia y Nilpotencia

Definición 3.16. $A \in M(n;\mathbb{R})$ se dice *idempotente* si $A^2 = A$.

Proposición 3.17. Si $A \in M(n;\mathbb{R})$ es idempotente distinta de I_n entonces A no es invertible.

Demostración. Si A fuese invertible entonces $A^2 = A$ implica que $A^{-1}A^2 = A^{-1}A$, que resulta en la ecuación $A = I_n$. □

Definición 3.18. $A \in M(n;\mathbb{R})$ se dice *nilpotente* si existe un entero $m > 0$ tal que $A^m = 0_{n\times n}$. Al menor entero con esta propiedad se le llama *grado de nilpotencia* de A.

Proposición 3.19. Ninguna matriz nilpotente es invertible.

Demostración. Para A con grado de nilpotencia $m = 1$ es claro. Si A es invertible y tiene grado de nilpotencia $m > 1$, entonces $A^m = 0_{n\times n}$ y multiplicando por A^{-1} ambos lados se tiene que $A^{m-1} = 0_{n\times n}$, entonces m no es su grado de nilpotencia, lo cual es una contradicción. □

3.4. Referencias Útiles

Para estudiar la materia

- Del libro [ACG14], secciones: 2.5, 2.6.
- Del libro [GF12], secciones: 2.4, 2.6.

Ejercicios recomendados

- Del libro [ACG14], sección 2.8 Ejercicios: 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53.

3.5. Ejercicios Matrices Invertibles

3.1. En cada caso, si la matriz es invertible calcule su inversa.

(a) $\begin{pmatrix} -29 & -10 & -6 \\ 3 & 1 & 0 \\ 107 & 37 & 25 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -3 & 22 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 37 & -4 & -17 \\ -9 & 1 & 3 \\ 74 & -8 & -33 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 6 & -10 & 4 \\ -9 & -7 & 8 \\ 102 & 6 & -44 \end{pmatrix}$ **(e)** $\begin{pmatrix} 11 & -5 & 20 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 40 & -18 & 83 & 10 \\ -69 & 31 & -126 & -20 \end{pmatrix}$ **(f)** $\begin{pmatrix} -9 & -10 & 5 & -2 \\ 8 & 7 & -8 & 2 \\ -5 & -2 & 0 & -9 \\ -43 & -35 & 26 & -2 \end{pmatrix}$

3.2. Muestre las siguientes propiedades sobre matrices matrices cuadradas.

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$ **(b)** $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

(c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **(d)** $(A^tB^{-1}C^{-1}B^tA^{-1})^{-1} = (A^{-1}B^tC^tB^{-1}A^t)^t$

3.3. Use el método de Gauss-Jordan para calcular la matriz inversa en cada caso.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x, y, z, w \neq 0$.

3.4. En cada caso de un ejemplo de matriz cuadrada que cumpla con la condición respectiva.

(a) Matriz escalonada reducida de rango 2 no invertible.

(b) Matriz escalonada de rango 3 invertible cuya transpuesta no sea escalonada.

(c) Matriz escalonada reducida de rango 3 no invertible que elevada al cuadrado tenga rango 2 y que elevada al cubo tenga rango 1.

3.5. En cada caso exprese la matriz inversa respectiva como producto de matrices elementales.

(a) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $\cos\theta \neq 0$. **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 15 \end{pmatrix}$

3.6. De un ejemplo de una matriz A cuadrada 3×3 de rango 2 nilpotente tal que $A^3 = O$. Verifique que la matrix $I - A$ es invertible calculando su matriz escalonada reducida, y que su inversa es igual a $I + A + A^2$.

3.7. Encuentre matrices 6×6 idempotentes A, B, C de rangos 1, 2 y 3, respectivamente, tal que $A + B + C$ sea invertible.

3.6. Soluciones Matrices Invertibles

3.1. R/

(a) $\begin{pmatrix} 25 & 28 & 6 \\ -75 & -83 & -18 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **(b)** No es invertible. **(c)** $\begin{pmatrix} -9 & 4 & 5 \\ -75 & 37 & 42 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) No es invertible. **(e)** $\begin{pmatrix} -150 & -85 & -13 & -29 \\ -250 & -139 & -21 & -48 \\ 10 & 6 & 1 & 2 \\ 67 & 40 & 6 & 13 \end{pmatrix}$ **(f)** No es invertible.

3.2. R/

(a) Como A es invertible la matriz B que satisface $B(A^{-1}) = I$ es A, por lo tanto $(A^{-1})^{-1}$.

(b) $AA^{-1} = I \Longrightarrow (AA^{-1})^t = I^t \Longrightarrow (A^{-1})^t A^t = I$, así $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

(c) $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = I$, por lo tanto $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(d) $(A^tB^{-1}C^{-1}B^tA^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}(B^t)^{-1}(C^{-1})^{-1}(B^{-1})^{-1}(A^t)^{-1} = A(B^t)^{-1}CB(A^t)^{-1} =$
$A(B^{-1})^tCB(A^{-1})^t = (A^t)^t(B^{-1})^t(C^t)^t(B^t)^t(A^{-1})^t = (A^{-1}B^tC^tB^{-1}A^t)^t$.

3.3. R/

(a) $\begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} -7 & -4 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/w \\ 0 & 0 & 1/z & 0 \\ 0 & 1/y & 0 & 0 \\ 1/x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.4. R/

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.5. R/

(a) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = E_{f_1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}f_2} E_{\cos\theta f_2} E_{f_2-\sin\theta f_1} E_{\frac{1}{\cos\theta}f_1}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 15 \end{pmatrix}^{-1} = E_{f_1-f_3} E_{f_2+2f_3} E_{\frac{1}{6}f_3} E_{f_3-6f_2} E_{f_1+2f_2} E_{-\frac{1}{3}f_2} E_{f_3-7f_1} E_{f_2+4f_1}$

3.6. R/ Tome $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se calcula su inversa $(I - A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+f_3}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Al dar I en el lado izquierdo la matriz $I - A$ es invertible, y además $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por otro lado $I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, así $I + A + A^2 = (I - A)^{-1}$.

3.7. R/ Tome $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

CAPÍTULO 4

Determinantes

4.1. Determinante de una Matriz

DEFINICIÓN 4.1. Si $A \in M(n;\mathbb{R})$ con $n > 1$, se escribe A_{ij} como la matriz de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A.

DEFINICIÓN 4.2. La *función determinante* $\det : M(n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ se define por inducción sobre n.

$\boxed{n = 1:}$ Si $A = (a_{ij})_{1\times 1}$ entonces $\det(A) = a_{11}$.

$\boxed{n > 1:}$ Si $A = (a_{ij})_{n\times n}$ entonces $\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) + \cdots + (-1)^n a_{1n}\det(A_{1n})$.

Al número real $\det(A)$ se le llama el *determinante* de la matriz A. También se acostumbra usar la notación $|A|$.

OBSERVACIÓN 4.3. Se tienen las siguientes fórmulas para los casos $n = 2$ y $n = 3$.

$$\boxed{\text{n=2:}}\ \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\boxed{\text{n=3:}}\ \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

PROPOSICIÓN 4.4. Si $A \in M(n;\mathbb{R})$, para todo $1 \le i \le n$ se cumple que

$$\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}\det(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}\det(A_{in})$$

OBSERVACIÓN 4.5. La proposición 4.4 dice que, si bien en la fórmula para el cálculo de $\det(A)$ se usan los elementos de la primera fila de A como coeficientes, esto se puede hacer con cualquier fila luego de ajustar los signos y no cambiar el resultado. Además, al no depender de una fila para desarrollar la fórmula del determinante, este planteamiento se puede usar para reducir los cálculos, por ejemplo, eligiendo una fila con la mayor cantidad posible de entradas.

OBSERVACIÓN 4.6. Cuando se desarrolla la fórmula del determinante de una matriz $n\times n$ se obtiene una suma con un total de $n!$ términos.† Cada uno de estos términos se puede ver como el resultado de multiplicar los elementos de la diagonal de la matriz A luego de permutar sus filas de una forma en particular. El número $n!$ cubren todas las posibilidades.

†El factorial de un entero $n \ge 1$ está dado por $n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1$.

Proposición 4.7. Se tienen las siguientes propiedades del determinante para $A \in M(n;\mathbb{R})$:

(i) $\det(0_{n\times n}) = 0$ y $\det(I_n) = 1$.

(ii) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) $\det(A) = 0$ si alguna de sus filas o columnas es nula.

(iv) $\det(A) = 0$ si dos de sus filas son iguales.

Proposición 4.8. Si $A = (a_{ij})_{n\times n}$ es una matriz diagonal, triangular superior o triangular inferior, entonces $\det(A)$ es igual al producto de los elementos de su diagonal, es decir,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Proposición 4.9. Si $A \in M(n;\mathbb{R})$ tal que $A = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$, donde B y D son submatrices cuadradas y O es una matriz(no necesariamente cuadrada) nula, entonces $\det(A) = \det(B)\det(D)$.

Proposición 4.10. La función determinante es lineal con respecto a las filas, es decir, si $B, C \in M(n;\mathbb{R})$ son iguales, salvo en la fila i, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que $\det(B) + \alpha\det(C) = \det(A)$, donde $A \in M(n;\mathbb{R})$ es igual a B salvo que su fila i es el resultado de sumar la fila i de B mas α veces la fila i de C.

Proposición 4.11. Sean $A, B \in M(n;\mathbb{R})$. Las siguientes propiedades dan el valor del determinante de las matrices elementales y la forma en la que cambia el determinante de la matriz a la que se le aplica la operación elemental respectiva.

(i) Si $A \xrightarrow{\alpha f_i} B$ entonces $|E_{\alpha f_i}| = \alpha$ y $|B| = \alpha|A|$.

(ii) Si $A \xrightarrow{f_i+\alpha f_j} B$ entonces $|E_{f_i+\alpha f_j}| = 1$ y $|B| = |A|$.

(iii) Si $A \xrightarrow{f_i\leftrightarrow f_j} B$ entonces $|E_{f_i\leftrightarrow}| = -1$ y $|B| = -|A|$.

Teorema 4.12. Si $A, B \in M(n;\mathbb{R})$ entonces $\det(AB) = \det(A)(B)$.

Proposición 4.13. Para toda $A \in M(n;\mathbb{R})$, $\det(A) = \det(A^t)$. Así, transponer una matriz no cambia el valor del determinante.

Demostración. Ver Teorema 3.2.4 de [GF12]. □

Comentario 4.14. Las propiedades sobre determinantes son útiles para simplificar los cálculos. Por ejemplo, debido a que sumar multiplos de una fila a otra no cambia el valor del determinante, entonces uno podría usar esto para simplificar A mediante operaciones de fila hasta obtener una matriz con varios cero en una fila o una que tenga forma triangular.

4.2. Matrices Inversas y Determinantes

Definición 4.15. Para $A = (a_{ij})_{n\times n}$ se define como el *cofactor* (i,j) al número $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$. Se usa la notación $C_A(i,j)$ o simplemente $C(i,j)$, cuando la matriz A es clara.

Observación 4.16. En términos de cofactores la fórmula del determinante se puede escribir como

$$\det(A) = a_{i1}C_A(i,1) + \cdots + a_{in}C_A(i,n)$$

Definición 4.17. Para $A = (a_{ij})_{n\times n}$ se define la *matriz de cofactores de* A como la matriz C_A de tamaño $n \times n$ cuya entrada en la fila i y columna j es el cofactor (i,j) de A.

Definición 4.18. Si $A \in M(n;\mathbb{R})$ entonces se define la *matriz adjunta de* A como la matriz transpuesta de su matriz de cofactores y se denota $\mathrm{adj}(A)$. Así, $\mathrm{adj}(A) = C_A^t$.

Proposición 4.19. Si $A \in M(n;\mathbb{R})$ invertible entonces $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Demostración. Como A es invertible entonces $A^{-1}A = I_n$, así $|A^{-1}A| = |I_n| = 1$ y por teorema 4.12 se tiene $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$. □

Proposición 4.20. $A \in M(n;\mathbb{R})$ es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$.

Teorema 4.21. Si $A \in M(n;\mathbb{R})$ entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A)$.

Observación 4.22. El teorema 4.21 nos da una forma alternativa para cacular matrices inversas usando solamente determinantes.

4.3. Regla de Cramer

Proposición 4.23. Sea $AX = b$ un sistema de ecuaciones con $A \in M(n;\mathbb{R})$. Entonces, $AX = b$ tiene solución única si y solo si $\det(A) \neq 0$.

Definición 4.24. Si $A \in M(n;\mathbb{R})$ y $b \in M(n,1;\mathbb{R})$, se define $A(c_i/b) \in M(n;\mathbb{R})$ como la matriz que se obtiene de A al sustituir su columna i por b.

Teorema 4.25 (Regla de Cramer). Sea $AX = b$ un sistema de ecuaciones con $A \in M(n;\mathbb{R})$. Si $\det(A) \neq 0$ entonces la única solución de este sistema $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ satisface

$$x_i = \frac{|A(c_i/b)|}{|A|}$$

para todo $1 \leq i \leq n$.

4.4. Referencias Útiles

Para estudiar la materia

- Del libro [ACG14], secciones: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4.
- Del libro [GF12], secciones: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4.

Ejercicios recomendados

- Del libro [ACG14], sección 3.5 Ejercicios: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22.

4.5. Ejercicios Determinantes

4.1. Calcule el determinante de las siguientes matrices.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 10 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & -27 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -13 \\ -2 & 2 & -5 \\ -6 & -4 & 91 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -14 \\ -2 & 1 & -6 \\ 12 & -10 & 66 \end{pmatrix}$ **(e)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ -9 & 2 & -3 \\ 27 & -8 & 96 \end{pmatrix}$ **(f)** $\begin{pmatrix} -10 & -8 & 7 \\ 22 & 8 & -25 \\ -4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} -70 & -18 & -40 & -10 \\ -8 & -2 & -4 & 0 \\ 250 & 64 & 142 & 44 \\ -142 & 36 & -80 & -40 \end{pmatrix}$ **(h)** $\begin{pmatrix} -9 & -2 & 9 & -7 \\ 5 & 1 & -6 & 0 \\ -12 & -2 & 19 & 7 \\ -65 & -12 & 89 & 22 \end{pmatrix}$ **(i)** $\begin{pmatrix} 43 & 26 & 66 & 8 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ -69 & -7 & -44 & -6 \\ -9 & -2 & -8 & -1 \end{pmatrix}$

4.2. Resuelva los siguientes sistemas usando la regla de Cramer.

(a) $\begin{cases} 5x + 4y + 32z = 1 \\ x + y + 8z = -1 \\ -x + z = 1 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 4x + 2y + 10z = -2 \\ 3x + 2y + z = 6 \\ 4x + 6y - 41z = 0 \end{cases}$

4.3. Calcule el determinante de la matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño 5×5 dada por la regla

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ j - i + 1 & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

Encuentre el número total de matrices B que satisfacen $\det(B) = -\det(A)$ y que son equivalentes a A por una sola operación de filas.

4.4. Usando las propiedades del determinante verifique que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 & b+c \\ 1 & a & 0 & -1 & b+c+1 \\ 1 & 0 & b & 0 & a+c \\ 1 & -1 & 0 & c & a+b+1 \\ 1 & 0 & c & 0 & a+b \end{vmatrix} = 0$$

4.5. Determine todos los valores de x para los cuales $\begin{pmatrix} x+1 & x & x \\ x & x+1 & x \\ x & x & x+1 \end{pmatrix}$ es invertible.

4.6. Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^2 \\ x + by + b^2 z = b^2 \\ x + cy + c^2 z = c^2 \end{cases}$.

(a) Verifique que el determinante de su matriz de coeficientes es $(b-a)(c-a)(c-b)$.

(b) Muestre que este sistema tiene solución única solamente cuando a, b y c son diferentes.

(c) Si el sistema tiene solución única, encuentrela usando la regla de Cramer.

4.6. Soluciones Ejercicios Determinantes

4.1. R/

(a)	1	**(b)**	-1	**(c)**	2	**(d)**	-4	**(e)**	6
(f)	0	**(g)**	16	**(h)**	1	**(i)**	-1		

4.2. R/

(a) $x = 5$, $y = -54$, $z = 6$. **(b)** $x = 514$, $y = -739$, $z = -58$.

4.3. R/ Se tiene que $A = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5\\ 0&1&2&3&4\\ 0&0&1&2&3\\ 0&0&0&1&2\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$, y al ser triangular superior $|A| = 1$. La única forma de obtener el tipo de matrices B es intercambiando una vez un par de filas de A. En total, es posible hacer los siguientes intercambios $f_1 \longleftrightarrow f_2$, $f_1 \longleftrightarrow f_3$, $f_1 \longleftrightarrow f_4$, $f_1 \longleftrightarrow f_5$, $f_2 \longleftrightarrow f_3$, $f_2 \longleftrightarrow f_4$, $f_2 \longleftrightarrow f_5$, $f_3 \longleftrightarrow f_4$, $f_3 \longleftrightarrow f_5$ y $f_4 \longleftrightarrow f_5$. Así el número total de posibles matrices B es 10.

4.4. R/ $\begin{vmatrix} 1&0&a&0&b+c\\ 1&a&0&-1&b+c+1\\ 1&0&b&0&a+c\\ 1&-1&0&c&a+b+1\\ 1&0&c&0&a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&a&0&-1&0\\ a&0&b&0&c\\ 0&-1&0&c&0\\ b+c&b+c+1&a+c&a+b+1&a+b \end{vmatrix} \overset{f_5+f_3}{\underset{=}{\longrightarrow}} \begin{vmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&a&0&-1&0\\ a&0&b&0&c\\ 0&-1&0&c&0\\ a+b+c&b+c+1&a+b+c&a+b+1&a+b+c \end{vmatrix}$

$\overset{f_5+f_2}{\underset{f_5+f_4\ =}{\longrightarrow}} \begin{vmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&a&0&-1&0\\ a&0&b&0&c\\ 0&-1&0&c&0\\ a+b+c&a+b+c&a+b+c&a+b+c&a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&a&0&-1&0\\ a&0&b&0&c\\ 0&-1&0&c&0\\ 1&1&1&1&1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\cdot 0 = 0.$

4.5. R/ El determinante de la matriz es $1+3x$. Por lo tanto para que sea invertible basta con que $1+3x$ sea diferente de cero, es decir, la matriz es invertible para todo x tal que $x \neq -\frac{1}{3}$.

4.6. R/

(a) $\begin{vmatrix} 1&a&a^2\\ 1&b&b^2\\ 1&c&c^2 \end{vmatrix} \overset{f_2-f_1}{\underset{=}{\longrightarrow}} \begin{vmatrix} 1&a&a^2\\ 0&b-a&b^2-a^2\\ 1&c&c^2 \end{vmatrix} \overset{f_3-f_1}{\underset{=}{\longrightarrow}} \begin{vmatrix} 1&a&a^2\\ 0&b-a&b^2-a^2\\ 1&c-a&c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a&b^2-a^2\\ c-a&c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(c-b)$

(b) El sistema al ser cuadrado, tiene solución única solo cuando el determinante de su matriz es diferente de cero. Y al ser este igual a $(b-c)(c-a)(c-b)$, esto sucede cuando se cumple simultáneamente que $b \neq c$, $c \neq a$ y $c \neq b$.

(c) En el sistema $AX = d$, se tiene que $A = \begin{pmatrix} 1&a&a^2\\ 1&b&b^2\\ 1&c&c^2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}$ y $d = \begin{pmatrix} a^2\\ b^2\\ c^2 \end{pmatrix}$. Ahora, usando la regla de Cramer se obtiene que:

$$x = \frac{|A(f_1|d)|}{|A|} = |A(f_1|d)| = 0, \text{ pues tiene dos columnas iguales.}$$

$$y = \frac{|A(f_2|d)|}{|A|} = |A(f_2|d)| = 0, \text{ pues tiene dos columnas iguales.}$$

$$z = \frac{|A(f_3|d)|}{|A|} = 1, \text{ pues } A \text{ y } A(f_3|d) \text{ es la misma matriz.}$$

Por lo tanto la solución es $X = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$.