MA 0292 Ejercicios para parcial I **II ciclo 2018**

1) Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=\alpha \\ 2x+\ \ y-\ \ z&=\beta \\ 2x+4y-6z&=2\alpha+2 \end{aligned}$$

Utilizando el método de eliminación gaussiana, demuestre que el sistema es inconsistente sin importar los valores de α y β.

2) Demuestre usando propiedades de los determinantes que la siguiente ecuación es válida.

$$\det\begin{bmatrix} a_1+db_1+ec_1 & a_2+db_2+ec_2 & a_3+db_3+ec_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

3) Considere la matriz: $B=\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{bmatrix}$

a. Use solamente operaciones elementales para calcular det(*B*).
b. ¿Qué valores de *α* hacen que *B* tenga matriz inversa?
c. Encuentre el rango de *B*.

4) Considere la matriz: $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

a. Determine si A es invertible y de ser así, calcule su inversa.
b. Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x+4y+3z&=1 \\ y-\ \ z&=0 \\ 3x+5y+7z&=-2 \end{aligned}$$

Sin hacer algún cálculo justifique porqué el sistema tiene solución única.

c. Determine ¨*z*¨ utilizando la Regla de Cramer.

5) Verifique usando propiedades de los determinantes la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

6) Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & \alpha+3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1-\alpha & \alpha-1 & \alpha-1 \end{bmatrix}$

a. Calcule det(*A*).
b. ¿Qué valores de α hacen que el sistema *A*x = 0 tenga solución única?
c. Para $\alpha = 1$. ¿Cuál es el rango de *A*?

7) Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$2x - y - \beta z = 1$$

$$x - y - 2z = 1$$

$$-x + 2z = \beta$$

a. Determine las soluciones del sistema de ecuaciones usando el método de eliminación de Gauss para todos los posibles valores del parámetro β.
b. Para $\beta = 2$, calcule el valor de ¨*y*¨ utilizando la regla de Cramer.

8) Sean las matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a. Hallar una matriz *K* de manera que $CKB = A^t$
b. Calcule la inversa de *A*.

9) Usando eliminación gaussiana determine los valores de λ para que el sistema de ecuaciones lineales:

$$x - y + \lambda z = -2$$

$$-x + 2y - \lambda z = 3$$

$$\lambda x + y + z = 2$$

tenga solución única y encuentre dicha solución.

10) Considere la matriz: $A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{bmatrix}$ Calcule det (A).

a. Encuentre los valores de α que hacen que el sistema $Ax = 0$ tenga soluciones no nulas.
b. ¿Para $\alpha = -1/4$. ¿Cuál es el rango de A en este caso?
c. Calcule la inversa de la matriz A para $\alpha = -1$.

11) Use el álgebra de matrices para encontrar la matriz X que satisface la ecuación $X - E + (X^t B)^t = -CA^t X$, suponiendo que $I + CA^t + B^t$ es invertible.

12) Considere la matriz $C = \begin{pmatrix} x & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$

a. ¿Para qué valores de "x", la matriz C es equivalente a la matriz identidad?
b. Determine C^{-1} cuando $x = 2$.
c. Si $x = 1$, ¿Cuál es el rango de C ?

13) Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + (\beta^2 - 5)x_3 &= \beta \end{cases}$$

Utilizando el método de eliminación de Gauss - Jordan:

a. Resuelva el sistema para el valor de β para el cual se tienen infinitas soluciones y encuentre estas soluciones.
b. Encuentre los valores de β para los cuales, el sistema posee solución única.
c. Para el caso $\beta = 0$ calcule el valor de "*z*" utilizando la regla de Cramer.

14) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ tal que $|A| = 5$

Encuentre el determinante de la siguiente matriz *B* aplicando únicamente propiedades del determinante y la información anterior.

$$B = \begin{pmatrix} 3b+3c & 2c+2a & 4b+4a \\ 3a+3b & 2c+2b & 4a+4c \\ 3c+3a & 2b+2a & 4b+4c \end{pmatrix}$$

15) Considere los vértices *A*=(5,2,2), *B*=(4,0,1), *C*=(0,0,1), y *D*=(1,2,2)

a. Verifique que los vértices *A*, *B*, *C* y *D* determinan un paralelogramo.
b. Encuentre el área del paralelogramo □ ABCD.
c. Encuentre la medida del ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
d. ¿Es el paralelogramo □ ABCD un rectángulo?
e. Calcule la proyección de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$.

16) Considere el paralelogramo de vértices *A*, *B*, *C*, *D* donde los vértices son dados por *A*=(-1,2,3), *B*=(-1,1,5), *C*=(-1,-3,5). Encuentre:

a. El vértice *D* el cual hace que □ ABCD sea un paralelogramo.
b. El coseno del ángulo del vértice *B*.
c. Calcule el área del triángulo determinado por los vértices *A*, *B* y *C.*
d. Calcule la longitud de la altura sobre $\overrightarrow{AB}$.

17) Sean $u = (-1,0,1,)$ y $v = (1,1,0)$.

a. Calcule el ángulo θ entre los vectores $2u$ y $-v$.

b. Encuentre un vector unitario paralelo a *u*.
c. Encuentre un vector que sea ortogonal tanto a 2*u* como a -*v*.
d. Calcule $\text{Proy}_{-v}\, 2u$.
e. Calcule el área del paralelogramo determinado por $2u$ y $-v$.

18) Considere el triángulo de vértices dados por *P* = (0,1,5), *Q* = (1,0,-3), *R* (3,2,0).

a. ¿Es el triángulo Δ*PQR* rectángulo?
b. Calcule el área del triángulo determinado por los vértices *P*, *Q* y *R*.
c. Calcule el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.
d. Encuentre un vector ortogonal a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ simultáneamente.
e. Si *S* = (1,0,0), encuentre el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$ y $\overrightarrow{PR}$.

19) Supóngase dados dos vectores diferentes $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Sea *D* el punto medio del segmento *BC*. Demuestre que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

MA 307 ejercicios para el parcial I — II ciclo 2018

1) Conteste verdadero (V) o falso (F), justifique su respuesta.

a. ( ) Si $A, B \in M(n,\mathbb{R})$, entonces $A(AB)^t = AA^tB^t$.

b. ( ) Si $AB = I$ entonces det(*A*)=0, con A, B, I matrices $n \times n$.

c. ( ) Si $A^2+3A = I$, entonces *A* es invertible, con *I* y *A* matrices $n \times n$.

d. ( ) Sean B, C *y* $D \in M(n,\mathbb{R})$ *tal que* $(B-C)D = 0$. Si *D* es equivalente a I_n entonces *B* = *C*.

e. ( ) Sea $A \in M(5,\mathbb{R})$ con rango igual a 4, entonces el sistema Ax = 0 tiene solamente la solución trivial.

f. ( ) Si $(3A)^t$ es invertible con $A \in M(n,\mathbb{R})$ entonces A^3 es invertible.

g. ( ) Si *A* es antisimétrica ($A^t = -A$), entonces también lo es $B^t AB$ para cualquier matriz *B* de tamaño apropiado.

h. ( ) Sean $A \in M\left(2,3,\mathbb{R}\right)$ y $B \in M\left(3,2,\mathbb{R}\right)$. La ecuación $AX = B$ posee solución.

2) Conteste verdadero (V) o falso (F), justifique su respuesta.

a. ( )Suponga que $A \in M(p,\mathbb{R})$, $B \in M(p,q,\mathbb{R})$ y *AB* = 0. Entonces det(*A*)=0 o *B*= 0

b. ( ) Sea $A \in M(4,\mathbb{R})$, si det(*A*)=2 entonces det($3A^{-1}$)=3/2.

c. ( ) Sea $A \in M(p,q,\mathbb{R})$. La única solución de *Ax* = 0 es *x* =0 si rang(*A*)=*q*.

d. ( ) Sean $A, I \in M(n,\mathbb{R})$. Si $A^t A = I$ entonces det(*A*)=±1 y *A* es equivalente a *I*

e. ( ) Sea $A \in M(n,\mathbb{R})$. Si *A* es antisimétrica ($A^t = -A$), entonces det(*A*) ‡ 0 si *n* es impar.

3) Conteste verdadero (V) o falso (F), debe justificar su respuesta.

a. ( ) Sea $B \in M(p,\mathbb{R})$ tal que *AB* = 0 para toda matriz $A \in M(p,\mathbb{R})$. Entonces *B* = 0.

b. ( ) Considere $B \in M(m,n,\mathbb{R})$. Si el sistema *Bx* = 0 tiene soluciones no nulas entonces el rango de *B* es menor a *n*.

c. ( ) Sean $A, B, C \in M(n,\mathbb{R})$. Si ABC es invertible entonces A^t, B^t, C^t son matrices invertibles.

d. ( ) Dada $A \in M(4,\mathbb{R})$ suponga que la matriz *B* se obtiene de la matriz *A* por medio de sumar 5 veces la primera fila a la fila 2 y luego intercambiar las filas 3 y 4. Si det(*A*)=2 entonces $\det(3A^{-1}B^t) = -3$

4) Conteste verdadero (V) o falso (F), debe justificar su respuesta.

a. ( ) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$, entonces la única solución del sistema *Ax* = 0 es la solución (0,0).

b. ( ) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumple entonces que $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 4ab^2 \\ 0 & ba^2 \end{pmatrix}$

c. ( ) Sean $A, B \in M(n, \mathbb{R})$. Si $\det(AB) \neq 0$ entonces el rango de B^t es igual a *n*.

d. ( ) Para cualesquiera matrices $A, B \in M(n, \mathbb{R})$, se cumple que $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.