UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

II Ciclo de 2018
MA-294 Cálculo para Computación 2
20 de octubre de 2018
Tiempo: 180 minutos. Valor: 50 puntos.

Primer Examen Parcial

Instrucciones: Trabaje de forma individual, ordenada y justificando completamente las respuestas. Si alguna parte de una respuesta no está bien justificada, puede ver afectado su puntaje. Si la respuesta por desorden o escritura no es entendible, dicha respuesta no será calificada. Utilice bolígrafo con tinta azul o negra para escribir sus respuestas. Si hay partes escritas con lápiz puede ver afectado su derecho para reclamar. No use lapicero rojo o verde para consignar sus respuestas. Se permite el uso de calculadora no programable.Su teléfono celular deberá estar apagado.

1) Halle el valor de convergencia de la siguiente serie numérica: **(5 puntos)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n-1}}{2^{2n+1}}$$

2) Muestre que la siguiente serie converge absolutamente: **(4 puntos.)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1+e^n)}{\sqrt[5]{n^6+n^2+1}}$$

3) Analice la convergencia o divergencia de la siguiente serie numérica: **(6 puntos.)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$$

4) Sabemos que la función $f(x)$ satisface el siguiente desarrollo de Taylor alrededor de $a = 16$: $f(x) = 2 + \frac{1}{32}(x-16) - \frac{3}{4{,}096}(x-16)^2 + \frac{7}{128\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$; donde c está entre 16 y x.

(i) Identifique y escriba el polinomio de Taylor $T_2(x)$ y su respectivo resto de Lagrange $R_2(x)$ que están contenidos en el anterior desarrollo de $f(x)$. **(2 puntos)**

(ii) Obtenga un valor aproximado de $f(18)$ con base al anterior desarrollo de Taylor. **(2 puntos)**

(iii) Estime el error ε cometido con el valor aproximado de $f(18)$ obtenido en **(ii)** y verifique que $\varepsilon < 0{,}0005$. **(3 puntos)**

5)

(i) Obtenga el desarrollo limitado de e^{x^2} de orden 4 alrededor de 0. **(2 puntos)**

(ii) Obtenga el desarrollo limitado de $\cos^2(x)$ de orden 4 alrededor de 0. **(3 puntos)**

(iii) Utilice lo anterior para resolver el siguiente límite: **(3 puntos)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 2 + \cos^2(x)}{x^4}$$

6) Considere la sucesión (d_n), definida por recurrencia: $d_1 = 2$, $d_{n+1} = \dfrac{10 + d_n}{3}$

(i) Demuestre por inducción matemática que (d_n) está acotada superiormente por 5. **(4 puntos)**

(ii) Muestre que (d_n) es una sucesión creciente. **(3 puntos)**

(iii) Justifique por qué se puede concluir que (d_n) es convergente. **(1 punto)**

(iv) Calcule el límite de (d_n). **(2 puntos)**

7) Calcule el valor de la siguiente integral impropia: **(10 puntos)**

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\left(1 + \ln^2(x)\right)} dx$$

EL SIGUIENTE EJERCICIO ES OPCIONAL. OTORGA 5 PUNTOS EXTRA.

8) Halle el valor de convergencia de la siguiente serie numérica: **(5 puntos)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{3n^2 + 2n}{3n^2 + 2n - 1}\right)$$

"No te preocupes por tus problemas con las matemáticas, te puedo asegurar que los míos son mayores."

Albert Einstein