Universidad de Costa Rica — MA1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería

Escuela de Matemática — 27 de octubre de 2018 (II-2018)

Tiempo: 3 horas — Puntaje Total: 86pts

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Este es un examen de desarrollo, todos los procedimientos que justifiquen su respuesta deben aparecer en el cuaderno de examen. No se permiten hojas sueltas durante el examen, ni el intercambio de instrumentos o materiales (incluyendo calculadora). **No se permite el uso calculadoras programables ni celulares.**

1. [20 pts] Hallar la solución general de la ecuación en forma de serie de potencia. Debe expresar los primeros cuatro términos no nulos.
$$y'' + (\cos(x))y = 0$$

2. [20 pts] Considere la ecuación diferencial $2xy'' + (x+1)y' + y = 0$. Utilice el método de Frobenius para resolver la ecuación diferencial.

3. [15 pts] Resuelva el siguiente problema de valor inicial:
$$y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}, \ \ con \ \ y(0) = y'(0) = 0.$$

4. *Transformada de Laplace.*

   (a) [7 pts] Calcule la *Transformada de Laplace* de la siguiente función:
$$f(t) = e^{3t}\left(9 - 4t + 10sen\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

   (b) [7 pts] Encuentre una función $f(t)$ cuya *Transformada de Laplace* sea:
$$F(s) = \frac{s-3}{(s-\sqrt{3})(s+\sqrt{3})}$$

   (c) [7 pts] Calcule la *Transformada de Laplace* de la siguiente función:
$$f(t) = te^{2t}sen(6t)$$

5. [15 pts] Resuelva la ecuación integro-diferencial
$$y'(t) = 1 - sen(t) - \int_0^t y(u)du, \ \ con \ \ y(0) = 0$$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$t^x, \ x > -1$	$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$
$H(t-a) = \mathrm{u}_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta_0(t-a) = \delta_a(t)$	e^{-as}
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n F}{ds^n}(s)$
$H(t-a)f(t-a) = \mathrm{u}_a(t) f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
$f(t) * g(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-u) g(u)\, du$	$F(s) \cdot G(s)$
$f^{(n)}(t) \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
Si $p > 0$ y $f(t+p) = f(t)$	$\frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt$
Si $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^{+\infty} F(u)\, du$