Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática

Departamento de Matemática Aplicada
MA-1005: Ecuaciones Diferenciales
I Ciclo lectivo del 2019

PRIMER EXAMEN PARCIAL (Solución[1])

Fecha de aplicación: Sábado 11 de mayo del 2019

1-) Sea $x > 0$. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) `[10 puntos]` $y'x^2 = xy + y^2$, sujeta a la condición inicial $y(e) = 1$.

(b) `[15 puntos]` $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$.

Solución. Ad(a) Normalizando la ecuación se obtiene

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2},$$

por ende esta es una ecuación diferencial homogénea. En este caso $F(w) = w + w^2$. Haciendo el cambio de variable $y = vx \Rightarrow y' = v'x + v$ se llega a la ecuación de variables separables

$$\frac{v'}{F(v) - v} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{v'}{v^2} = \frac{1}{x},$$

de donde

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{-1}{v} = \ln(x) + C \Rightarrow y = \frac{-x}{\ln(x) + C}.$$

Utilizando la condición inicial $1 = \dfrac{-e}{\ln(e) + C} \Rightarrow 1 + C = -e \Rightarrow C = -e - 1$. Por lo tanto, la solución particular buscada es $y = \dfrac{-x}{\ln(x) - e - 1}$.

Observación: Alternativamente, esta ecuación se puede ver como una ecuación de Bernoulli con $n = 2$.

$$x^2y' - xy = y^2 \Rightarrow y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}y^2.$$

Haciendo el cambio de variable $u = y^{1-2} = y^{-1}$ se obtiene la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$-u' - \frac{u}{x} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow u + \frac{u}{x} = \frac{-1}{x^2}.$$

El factor integrante de esta ecuación es

$$\mu(x) = \exp\left(\int^x \frac{dt}{t}\right) = e^{\ln(x)} = x.$$

Multiplicando por μ ambos miembros de la ecuación se obtiene

$$\frac{d}{dx}[ux] = -\frac{1}{x} \Rightarrow ux = \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C \Rightarrow u = \frac{-\ln(x) + C}{x} \Rightarrow y = \frac{-x}{\ln(x) + C}.$$

[1] Soluciones propuestas por los profesores Lourdes Hernández y Adrián José Naranjo.

Ad(b) La solución general de la ecuación homogénea asociada es $y_h = (c_1+c_2x)e^x$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, pues el polinomio característico es $p(m) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$. El conjunto $\{e^x, xe^x\}$ es un sistema fundamental de soluciones. Su wronskiano es

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}.$$

Utilizandoel método de variación de parámetros, la solución particular de la ecuación es

$$\begin{aligned} y_p &= -e^x \int^x \frac{te^t \cdot e^t}{e^{2t}t^2} dt + xe^x \int^x \frac{e^t \cdot e^t}{e^{2t}t^2} dt \\ &= -e^x \int^x \frac{dt}{t} + xe^x \int^x \frac{dt}{t^2} \\ &= -e^x \ln(x) - \frac{xe^x}{x} = -e^x\left(\ln(x) + 1\right) \end{aligned}$$

Así, la solución general de la ecuación dada es

$$y = y_h + y_p = e^x(c_1 + c_2x - \ln(x) - 1) = e^x(c_1' + c_2x - \ln(x)),$$

donde $c_1', c_2 \in \mathbb{C}$ y $c_1' = c_1 - 1$. ◀

2-) La ecuación diferencial

$$dx + (\cot(\beta y) + \ln(y)e^{-x}\csc(y))dy = 0$$

posee un factor integrante $\mu(x,y) = e^x \operatorname{sen}(\beta y)$, donde $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) `[6 puntos]` Determine el valor del parámetro β.

(b) `[10 puntos]` Resuelva la ecuación.

Solución. Ad(a) Multiplicando por el factor integrante obtenemos

$$e^x \operatorname{sen}(\beta y)dx + (e^x \cot(y) + \ln(y)\csc(y))\operatorname{sen}(\beta y)dy = 0.$$

Por definición, esta ecuación es exacta, por lo que

$$\frac{\partial}{\partial y}[e^x \operatorname{sen}(\beta y)] = \frac{\partial}{\partial x}[(e^x \cot(\beta y) + \ln(y)\csc(y))\operatorname{sen}(\beta y)],$$

es decir

$$\beta e^x \cos(\beta y) = e^x \cot(\beta y)\operatorname{sen}(\beta y) \Leftrightarrow \beta e^x \cos(\beta y) = e^x \cos(\beta y) \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Ad(b) Hay que resolver la ecuación exacta

$$e^x \operatorname{sen}(y)dx + (e^x \cos(y) + \ln(y))dy = 0.$$

Sea F una función potencial de la ecuación, entonces

$$F_x(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y) \Rightarrow F(x,y) = \int e^x \operatorname{sen}(y\partial x) = e^x \operatorname{sen}(y) + f(y).$$

Derivando F parcialmente con respecto a y e igualando con $N\mu$ llegamos a que

$$e^x\cos(y) + f'(x) = e^x\cos(y) + \ln(y) \Rightarrow f(y) = \int \ln(y)dy = y\ln(y) - y + C.$$

Por ende la solución general de la ecuación es $e^x\operatorname{sen}(y) + y\ln(y) - y = c$, con $c \in \mathbb{R}$. ◀

3-) `[12 puntos]` Determine la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = e^x(1+x)^{2019} + \frac{2019y}{x+1}.$$

Solución. La ecuación equivale a $y' - \dfrac{2019}{x+1}y = e^x(1+x)^{2019}$, que es una ecuación lineal con factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left(\int^x -\frac{2019}{t+1}dt\right) = \exp\left(-2019\int^x \frac{dt}{t+1}\right) = \exp\left[\ln\left((1+x)^{-2019}\right)\right] = (1+x)^{-2019}.$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación se llega a

$$\left[y(1+x)^{-2019}\right]' = e^x(1+x)^{2019}(1+x)^{-2019} = e^x,$$

de donde

$$y(1+x)^{-2019} = \int e^x dx = e^x + C \Rightarrow y = (1+x)^{2019}(e^x + C) = e^x(1+x)^{2019} + C(1+x)^{2019}$$

es la solución general de la ecuación. ◀

4-) Considere la ecuación diferencial $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)\,y = 0$ en $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

(a) `[6 puntos]` Muestre que $\phi(x) = x\operatorname{sen}(x)$ es una solución particular de la ecuación.

(b) `[10 puntos]` Halle su solución general.

Solución. Ad(a) Vea que

$$\phi'(x) = \operatorname{sen}(x) + x\cos(x) \Rightarrow \phi''(x) = \cos(x) + \cos(x) - x\operatorname{sen}(x) = 2\cos(x) - x\operatorname{sen}(x).$$

Si $\psi(x, y, y', y'') = x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y$ entonces poniendo $y = \phi(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\psi(x, y, y', y'') &= x^2(2\cos(x) - x\operatorname{sen}(x)) - 2x(\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)) + (x^2+2)x\operatorname{sen}(x)\\ &= 2x^2\cos(x) - x^3\operatorname{sen}(x) - 2x\operatorname{sen}(x) - 2x^2\cos(x) + x^3\operatorname{sen}(x) + 2x\operatorname{sen}(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

Se concluye $y = x\operatorname{sen}(x)$ es una solución de la ecuación.

Ad(b) Para determinar la solución general de la ecuación, es necesario hallar una solución y_2 de la ecuación que sea linealmente independiente a $y_1 = \phi(x)$; para esto invocaremos la fórmula de Abel:

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{\exp\left(-\int^x \frac{b(t)}{a(t)}dt\right)}{[y_1(x)]^2}dx = x\operatorname{sen}(x)\int \frac{\exp\left(-\int^x \frac{-2t}{t^2}\right)}{x^2\operatorname{sen}^2(x)}dx.$$

Como $\exp\left(-\int^x \frac{-2t}{t^2}dt\right) = \exp\left(2\int^x \frac{dt}{t}\right) = e^{\ln(x^2)} = x^2$ entonces

$$y_2(x) = \int \frac{x^2}{x^2\operatorname{sen}^2(x)}dx = x\operatorname{sen}(x)\int \csc^2(x)dx = x\operatorname{sen}(x)(-\cot(x)+C) = -x\cos(x),$$

tomando la constante de integración $C = 0$. Se concluye $\{x\operatorname{sen}(x), -x\cos(x)\}$ es un sistema fundamental de soluciones (i.e. una base para el espacio vectorial de soluciones de la ecuación) y por lo tanto la solución general de la ecuación es $y = c_1x\operatorname{sen}(x) + c_2x\cos(x)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. ◀

5-) Para la ecuación diferencial $4xy'' + 2y' + y = 0$:

(a) `[4 puntos]` Muestre que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación.

(b) `[3 puntos]` Verifique que las raíces de la ecuación indicial de la ecuación diferencial son $r = 0$ y $r = \frac{1}{2}$.

(c) `[14 puntos]` Determine, haciendo uso del método apropiado, los primeros cinco términos no nulos de la solución particular asociada a la raíz indicial menor.

Solución. Ad(a) La ecuación equivale a $y'' + \frac{y'}{2x} + \frac{y}{4x} = 0$. Las funciones $p(x) := \frac{1}{2x}$ y $q(x) := \frac{1}{4x}$ no son (real-)analíticas en $x = 0$, pues las funciones ni siquiera están definidas en dicho punto. Por ende $x = 0$ es un punto singular. Pero como funciones $P(x) := xp(x) = \frac{1}{2}$ y $Q(x) := x^2q(x) = \frac{x}{4}$ sí son (real-)analíticas en $x = 0$, por lo que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación.

Ad(b) En este caso $p_0 := \lim\limits_{x\to 0} xp(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ y $q_0 := \lim\limits_{x\to 0} x^2q(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4} = 0$, por lo que la ecuación indicial de la ecuación diferencial es

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0 \Leftrightarrow r^2 - r + \frac{r}{2} = 0 \Leftrightarrow r\left(r - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

cuyas soluciones son $r_1 = 0$ y $r_2 = \frac{1}{2}$.

Ad(c) Como $r_2 - r_1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ entonces el Teorema de Fröbenius garantiza que existen dos soluciones analíticas linealmente independientes de la ecuación diferencial dadas por

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r_1} \ \wedge \ y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^{n+r_2}.$$

Como la raíz indicial menor corresponde a $r_1 = 0$, hallaremos únicamente y_1.

Si $y_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r_1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ entonces

$$y_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} \Rightarrow y_1''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

Sustituyendo en la ecuació diferencial:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Ajusnatndo índices:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n(n+1)a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4n(n+1)a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1} x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty}[4n(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + a_n]x^n = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(4n+2)a_{n+1} + a_n]x^n = 0,$$

de donde se obtiene la fórmula recursiva

$$a_{n+1} = \frac{-a_n}{(n+1)(4n+2)}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculando los primeros cinco coeficientes:

$$a_1 = \frac{-a_0}{1\cdot 2} = \frac{-a_0}{2},$$

$$a_2 = \frac{-a_1}{2\cdot 6} = \frac{a_0}{4\cdot 6} = \frac{a_0}{24},$$

$$a_3 = \frac{-a_2}{3\cdot 10} = \frac{-a_0}{3\cdot 10\cdot 24} = \frac{-a_0}{720},$$

$$a_4 = \frac{-a_3}{4\cdot 14} = \frac{a_0}{4\cdot 144\cdot 720} = \frac{a_0}{40320}.$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \\ &= a_0\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x^3}{720} + \frac{x^4}{40320} - \cdots\right). \end{aligned}$$

◀