Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática

Departamento de Matemática Aplicada
MA-1005: Ecuaciones Diferenciales
I Ciclo lectivo del 2020

I EXAMEN PARCIAL (PRIMERA CONVOCATORIA) [SOLUCIONARIO[1]]

Primera parte: Ecuaciones diferenciales de primer orden

1-) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden.

(a) $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(b) $x'(t) = x(t)\cot(t) + \dfrac{[x(t)]^3}{\operatorname{sen}(t)}$.

Solución. Ad(a): La ecuación $xy' = \sqrt{y^2 + x^2} + y$ es homogénea, pues

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y \Leftrightarrow y' = \frac{\sqrt{y^2 + x^2} + y}{x} = \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{x^2}} + \frac{y}{x} = \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} + \frac{y}{x}.$$

Haciendo el cambio $v = y/x$ se obtiene la ecuación

$$\frac{v'}{\sqrt{v^2 + 1}} = \frac{1}{x},$$

de donde

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}} = \ln|x| + C \Leftrightarrow \operatorname{arcsenh}(v) = \ln|x| + C.$$

Volviendo a la variable original se obtiene que la solución general de la ecuación es

$$\operatorname{arcsenh}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ad(b): La ecuación equivale a $x' - x\cot(t) = x^3\csc(t)$, que es una ecuación de Bernoulli con $n = 3$. Haciendo el cambio de variable $u = x^{1-3} = x^{-2}$ llegamos a la ecuación

$$\frac{-1}{2}u' - u\cot(t) = \csc(t) \Leftrightarrow u' + 2\cot(t)u = -2\csc(t),$$

que es una ecuación lineal de primer orden con factor integrante

$$\mu(t) = \exp\left(-2\int^t \cot(s)ds\right) = \exp\left(2\ln(\operatorname{sen}(t))\right) = \operatorname{sen}^2(t).$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por μ obtenemos

$$(u\operatorname{sen}^2(t))' = -2\operatorname{sen}(x) \Longrightarrow u\csc^2(t) = -2\int \operatorname{sen}(t)dt = 2\cos(t) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Así,

$$u(t) = \cos(t)\csc^2(t) + C\csc^2()t = \csc(t)\cot(t) + C\csc^2(x).$$

Volviendo a la variable original se concluye que la solución general de la ecuación es

$$\frac{1}{[x(t)]^2} = \csc(t)\cot(t) + C\csc^2(x),$$

donde $C \in \mathbb{R}$. ◄

[1] Soluciones propuestas por los profesores Adrián Naranjo y Lourdes Hernández.

2-) Considere la ecuación diferencial

$$(y - xy^2 \ln(x))\, dx + x\, dy = 0.$$

(a) Si un factor integrante es de la forma $\mu(x, y) = h(x)y^n$, determine explícitamente el criterio de la función h y el valor del parámetro $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Halle la solución general de la ecuación.

Solución. **Solución 1:** Ad(a): Como $\mu(x, y) = h(x)y^n$ es un factor integrante, multiplicando la ecuación por μ obtenemos

$$(h(x)y^{n+1} - xh(x)y^{n+2} \ln(x))dx + xh(x)y^n ty = 0.$$

Por definición de factor integrante, la ecuación es exacta, por lo que se debe cumplir la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial y}[h(x)y^{n+1} - xh(x)y^{n+2} \ln(x)] = \frac{\partial}{\partial x}[xh(x)y^n]$$

$$\implies (n+1)h(x)y^n - (n+2)xh(x)\ln(x)y^{n+1} = y^n[h'(x)x + h(x)]$$
$$\implies nh(x)y^n - (n+2)xh(x)\ln(x)y^{n+1} = xy^n h'(x).$$

Poniendo $n = -2$ obtenemos que

$$-2h(x) = xh'(x) \iff \frac{h'(x)}{x} = \frac{-2}{x} \Leftrightarrow \int \frac{h'(x)}{h(x)}dx = -2\int \frac{dx}{x} \iff h(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Por ende que $\mu(x, y) = (xy)^{-2}$.

Ad(b): La ecuación

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{\ln(x)}{x}\right)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{\frac{1}{xy^2}}_{N(x,y)}\, dy = 0$$

es exacta. Sea $F = F(x, y)$ una función potencial de la ecuación. Por definición $F_x = M$ y $F_y = N$, por lo que

$$F(x, y) = \int \frac{\partial y}{x^2y} = -\frac{1}{xy} + g(x).$$

Ahora, derivando parcialmente F con respecto a F e igualándola a M llegamos a que

$$\frac{1}{x^2y} + g'(x) = \frac{1}{x^2y} - \frac{\ln(x)}{x} \implies f'(x) = -\frac{\ln(x)}{x}dx \implies f(x) = -\int^x \frac{\ln(t)}{t}dt = -\frac{\ln^2(x)}{2}.$$

Así, nuestra la función potencial es $F(x, y) = \dfrac{-1}{xy} - \dfrac{\ln^2(x)}{2}$ y por ende la solución de la ecuación es

$$\frac{-1}{xy} - \frac{\ln^2(x)}{2} = C \Leftrightarrow y = -\frac{2}{x\ln^2(x) + Cx},$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Solución 2: Ad(a): Al expresar la ecuación es su forma estándar obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2\ln(x) - y}{x} = -\frac{y}{x} + \ln(x)y^2 \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \ln(x)y^2,$$

que es una ecuación de Bernoulli con $n = 2$. Haciendo el cambio de variable $u = y^{1-2} = y^{-1}$ la ecuación se convierte en la ecuación lineal

$$-u' + \frac{u}{x} = \ln(x) \Longleftrightarrow u' - \frac{u}{x} = -\ln(x)$$

cuyo factor integrante es

$$\mu(x) = \exp\left(-\int^x \frac{dt}{t}\right) = e^{\ln(1/x)} = \frac{1}{x}.$$

Por ende $h(x) := x^{-1}$ y $n = 0$.

Ad(b): Multiplicando la ecuación por μ llegamos a que

$$(u/x)' = -\frac{\ln(x)}{x} \Longrightarrow \frac{u}{x} = -\int \frac{\ln(x)}{x}dx = -\frac{\ln^2(x)}{2} + C \Longrightarrow u(x) = -x\frac{\ln^2(x)}{2} + Cx.$$

Y por ende la solución general de la ecuación es $y = -\dfrac{2}{x\ln^2(x) + Cx}$, con $C \in \mathbb{R}$. ◀

3-) Considere el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' &= \sqrt{1-(y')^2}, \\ y'(0) &= -1, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

Halle la solución del problema realizando el cambio de variable $p = y'$.

Solución. Haciendo el cambio de variable $y' = p$ obtenemos la ecuación

$$\frac{p'}{\sqrt{1-p^2}} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = \int dx = x + c \Leftrightarrow \operatorname{arc\,sen}(p) = x + c \Leftrightarrow p = y' = \operatorname{sen}(x+c).$$

Utilizando la primera condición inicial llegamos a que $-1 = \operatorname{sen}(c) \Rightarrow c = \operatorname{arc\,sen}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$. Por lo tanto

$$y = \int \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)dx = -\operatorname{sen}(x) + k,$$

y utilizando la segunda condición llegamos a que $0 = -\operatorname{sen}(0) + k \Rightarrow k = 0$; la solución del problema de Cauchy es $y = -\operatorname{sen}(x)$. ◀

Segunda parte: Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

4-) Considere la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$x''(t) - x'(t) + e^{2t}x(t) = 0.$$

Verifique que $x_1(t) = \operatorname{sen}(e^t)$ es una solución particular de la ecuación. En seguida, determine su solución general.

Solución. Primeramente vea que

$$x_1'(t) = \cos(e^t)e^t \Longrightarrow x_1''(t) = -\operatorname{sen}(e^t)e^{2t} + \cos(e^t)e^t = -e^{2t}x(t) + e^t\cos(t).$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene que

$$-e^{2t}x(t) + e^t\cos(t) - \cos(t)e^t + e^{2t}x(t) = 0.$$

Ahora bien, para encontrar otra solución $x_2 = x_2(t)$ linealmente independiente a x_1 utilizamos la fórmula de Abel:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \operatorname{sen}(e^t)\int^t \frac{\exp\left(-\int^x -dt\right)}{\operatorname{sen}^2(t)} \\ &= \operatorname{sen}(e^t)\int^t e^t\csc^2(e^t)dt = \operatorname{sen}(e^t)\int^x \csc^2(s)ds \\ &= -\operatorname{sen}(e^t)\cot(e^t) = -\cos(e^t), \end{aligned}$$

donde se utilizó el cambio de variable $s = e^t$. Por ende, la solución general de la ecuación es

$$y = c_1\operatorname{sen}(e^t) + c_2\cos(e^t),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ◀

5-) Considere el operador diferencial L dado por

$$L = D(D-1)(D^2+4)(D+3)^2.$$

(a) Resuelva la ecuación $Ly = 0$.

(b) Halle la *forma* de la solución particular de la ecuación diferencial inhomogénea

$$Ly = xe^x + \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

empleando anuladores diferenciales.

Solución. Ad(a): El polinomio característico de la ecuación $Ly = 0$ es

$$p(m) = m(m-1)(m^2+4)(m+3)^2,$$

por lo que la ecuación polinomial posee seis soluciones. $m = 0$, $m = 1$, $m = \pm 2i$ y $m = -3$. La raíz $m = -3$ es de multiplicidad 2, por lo que la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h = C_1 + C_2 e^x + (C_3 + C_4 x)e^{-3x} + C_5 \cos(2x) + C_6 \operatorname{sen}(2x),$$

con $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \in \mathbb{C}$.

Ad(b): Primeramente note que $\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \cos(2x)$. Un anulador de la función $x \mapsto xe^x$ es $H_1 = (D-1)^2$ y un anulador de la función $x \mapsto \cos(2x)$ es $H_2 = (D^2 + 4)$. Por ende

$$H = H_1 H_2 = (D-1)^2(D^2+4)$$

es un anulador para el miembro izquierdo de la ecuación. Resolviendo la ecuación $Hy = 0$ (y teniendo en cuenta la multiplicidad del polinomio característico de la ecuación homogénea asociada) obtenemos que y_p es de la forma

$$y_p = (A + Bx)xe^x + Cx\cos(2x) + Dx\operatorname{sen}(2x),$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{C}$. ◀

6-) Sea $x > 0$. Resuelva la ecuación diferencial

$$x^2 y'' = xy' + \operatorname{sen}\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)$$

utilizando el método de variación de parámetros.

[*Sugerencia:* La igualdad

$$\int \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)}{x^3}\,dx = -\frac{2\left[4\operatorname{sen}\left(\frac{\ln(x)}{2}\right) + \cos\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)\right]}{17x^2} + C, \text{ con } C \in \mathbb{R},$$

puede ser de utilidad.]

Solución. La ecuación equivale a $x^2y'' - xy' = \operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}))$. Vamos a resolver la ecuación homogénea asociada y luego emplearemos el método de variación de parámetros para determinar la solución (general) de la ecuación.

La ecuación homogénea asociada $x^2y'' - xy' = 0$ es una ecuación de Cauchy-Euler con polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$, cuyas raíces son $\lambda = 0$ y $\lambda = 2$. Como ambas raíces son simples entonces la solución es $y_h = c_1 + c_2x^2$.

Ahora bien, un sistema de soluciones fundamentales de la ecuación es $\{1, x^2\}$. Calculando el wronskiano de estas dos funciones linealmente independientes obtenemos que

$$W(1, x^2) = \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 2x.$$

En este caso $f(t) = \operatorname{sen}\left(\ln\left(\sqrt{t}\right)\right)/t^2$, por lo que aplicando el método de variación de parámetros obtenemos que

$$\begin{aligned} y_p &= -\int^x \frac{t^2}{2t^3}\operatorname{sen}\left(\ln\left(\sqrt{t}\right)\right)dt + x^2\int^x \frac{\operatorname{sen}\left(\ln\left(\sqrt{t}\right)\right)}{2t^3}dt \\ &= -\int^x \frac{\operatorname{sen}\left(\ln\left(\sqrt{t}\right)\right)}{2t}dt + \frac{x^2}{2}\int^x \frac{\operatorname{sen}\left(\ln\left(\sqrt{t}\right)\right)}{t^3}dt. \end{aligned}$$

La primera integral se calcula haciendo el cambio de variable $u = \log\left(\sqrt{x}\right) \Rightarrow du\dfrac{dx}{2x}$:

$$\int^x \frac{\operatorname{sen}\left(\ln\left(\sqrt{t}\right)\right)}{2t} = \int^x \operatorname{sen}(u)du = -\cos(u) = -\cos\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right),$$

y la segunda integral es igual a

$$\int^x \frac{\operatorname{sen}\left(\ln\left(\sqrt{t}\right)\right)}{t^3}dt = -\frac{2\left[4\operatorname{sen}\left(\frac{\ln(x)}{2}\right) + \cos\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)\right]}{17x^2},$$

por la sugerencia. Por ende

$$y_p = \cos\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right) - \frac{x^2\left[4\operatorname{sen}\left(\frac{\ln(x)}{2}\right) + \cos\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)\right]}{17x^2}$$

y por lo tanto la solución general es

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2x^2 + \cos\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right) - \frac{x^2\left[4\operatorname{sen}\left(\frac{\ln(x)}{2}\right) + \cos\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)\right]}{17x^2},$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. ◀