Universidad de Costa Rica | MA1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería

Escuela de Matemática | 5 de mayo de 2018 (I-2018)

Tiempo: 3 horas | Puntaje Total: 100pts

PRIMER EXAMEN PARCIAL (SOLUCIÓN)

Instrucciones: Este es un examen de desarrollo, todos los procedimientos que justifiquen su respuesta deben aparecer en el cuaderno de examen. No se permiten hojas sueltas durante el examen, ni el intercambio de instrumentos o materiales (incluyendo calculadora). **No se permite el uso calculadoras programables ni celulares.**

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) [15 pts.] $y' = y^4\cos(x) + y\tan(x)$

   SOLUCIÓN: Ecuación diferencial de *Bernoulli*.

$$y' - y\tan(x) = \cos(x)y^4$$

$$y^{-4}y' - y^{-3}\tan(x) = \cos(x)$$

Tomamos la sustitución $u = y^{-3}$ y $u' = -3y^{-4}y'$ entonces:

$$-\frac{u'}{3} - u\tan(x) = \cos(x)$$

La ecuación diferencial se convierte en una ecuación diferencial lineal.

$$u' + 3u\tan(x) = -3\cos(x)$$

Se calcula el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{3\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx} = e^{-3\ln|\cos(x)|} = \sec^3(x)$$

$$\int \left(sec^3(x)\cdot u\right)' = -3\int \sec^2(x)dx$$

$$\sec^3(x)\cdot u = -3\tan(x) + C$$

$$y^{-3} = -3\sin(x)\cos^2(x) + C\cos^3(x)$$

(b) [15 pts.] $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$

SOLUCIÓN:

$$y' = \frac{y(2x^2 - y^2)}{2x^3} = \frac{2x^2y - y^3}{2x^3} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

Tomando la sustitución $v = \frac{y}{x} \quad \rightarrow y = vx \quad \rightarrow y' = v + xv'$

$$v + xv' = v - \frac{v^3}{2}$$

$$xv' = -\frac{v^3}{2}$$

$$\int \frac{dv}{v^3} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{-2} = \ln(x) + C$$

2. Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y(2xy + 1)}{x(xy - 1)}$$

(a) [10 pts.] Demuestre que el cambio de variable $v = xy$ hace que la ecuación diferencial sea separable.

SOLUCIÓN:

$$v = xy \quad \rightarrow y = \frac{v}{x} \quad \rightarrow y' = -vx^{-2} + x^{-1}v'$$

$$\frac{xv' - v}{x^2} = \frac{\frac{v}{x}(2v + 1)}{x(v - 1)}$$

$$xv' = \frac{3v^2}{v - 1}$$

Ecuación diferencial separable.

(b) [10 pts.] Resuelva la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN:

$$\int \frac{(v - 1)dv}{v^2} = 3\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{v}dv - \int \frac{1}{v^2}dv = 3\ln|x| + C$$

$$\ln|v| + v^{-1} = 3\ln|x| + C$$

$$\ln|xy| + (xy)^{-1} = 3\ln|x| + C$$

3. Dada la ecuación diferencial:

$$x^2(\ln^2 x)y'' - 2x(\ln x)y' + (\ln x + 2)y = 0$$

(a) [5 pts.] Muestre que $y_1 = \ln x$ es una solución de la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN:

Si $y_1 = \ln x$, entonces $y_1' = \frac{1}{x}$ $y_1'' = -\frac{1}{x^2}$.

$$\Leftrightarrow x^2(\ln^2(x))\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{y_1''} - 2x(\ln(x))\underbrace{\frac{1}{x}}_{y_1'} + (\ln(x)+2)\underbrace{\ln x}_{y_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\ln^2(x) - 2\ln(x) + \ln^2(x) + 2\ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

(b) [10 pts.] Encuentre la solución general de la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN:

Usando Abel:

$$y_2 = \ln(x)\int \frac{e^{-\int \frac{-2x(\ln(x))}{x^2\ln^2(x)}dx}}{\ln^2(x)}dx$$

$$y_2 = \ln(x)\int \frac{e^{2\int \frac{1}{x\ln(x)}dx}}{\ln^2(x)}dx$$

$$y_2 = \ln(x)\int \frac{e^{\ln(\ln^2(x))}}{\ln^2(x)}dx = \int dx = x$$

$$y_2 = x\ln(x)$$

La solución general es: $y = A\ln(x) + Bx\ln(x)$

4. [20 pts.] Resuelva la ecuación diferencial:

$$y'' + \frac{1}{4}y = \sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right), \quad en \;\; 0 < x < \pi$$

SOLUCIÓN:

Primero se busca la solución de la homogénea complementaria:

$$y'' + \frac{1}{4}y = 0$$

Tomando el tipo de solución $y = e^{rx}$ tenemos la ecuación característica:

$$r^2 + \frac{1}{4} = 0 \;\; r = \pm\frac{1}{2}i$$

$$y_c = A\cos\left(\frac{x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

La solución general está dada por $y = A\cos\left(\frac{x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{x}{2}\right) + y_p$. Para buscar y_p usamos el método de variación de parámetros.

$$W\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right), \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{x}{2}\right) & \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) & \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin\left(\frac{x}{x}\right) \\ \sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right) & \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \end{vmatrix} = -\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{x}{2}\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) & \sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right) \end{vmatrix} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\Delta_1 = -2\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = 4\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2x$$

$$\Delta_2 = 2\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sec\left(\frac{x}{2}\right) + \csc\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = 2x + 4\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$y_p = \Delta_1(x)y_1 + \Delta_2(x)y_2$$

$$y_p = \underbrace{\left(4\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2x\right)}_{\Delta_1(x)}\underbrace{\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}_{y_1} + \underbrace{\left(2x + 4\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)}_{\Delta_2(x)}\underbrace{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}_{y_2}$$

$$y_p = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2x\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2x\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = A\cos\left(\frac{x}{2}\right)+B\sin\left(\frac{x}{2}\right)+4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)-2x\cos\left(\frac{x}{2}\right)+2x\sin\left(\frac{x}{2}\right)+4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

5. Dada la ecuación diferencial:

$$\left(3x+2y+y^2\right)dx+\left(x+4xy+5y^2\right)dy=0$$

(a) [10pts.] Encuentre un factor integrante de la forma $\eta=\eta(x+y^2)$.

SOLUCIÓN:

$$\eta(x+y^2)(3x+2y+y^2)dx+\eta(x+y^2)(x+4xy+5y^2)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\eta(x+y^2)(2+2y)+\eta'(x+y^2)(6xy+4y^2+2y^3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\eta(x+y^2)(1+4y)+\eta'(x+y^2)(x+4xy+5y^2)$$

$$\eta'(x+y^2)((x+y^2)(2y-1))=\eta(x+y^2)(2y-1)$$

Tome $u=x+y^2$, entonces:

$$\frac{\eta'(u)}{\eta(u)}=\frac{1}{u}$$

$$\int\frac{d\eta(u)}{\eta(u)}=\int\frac{du}{u}$$

$$\eta(u)=u,\ \ \underbrace{\eta(x+y^2)=x+y^2}_{\text{factor integrante}}$$

(b) [10pts.] Resuelva la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN:

La nueva ecuación diferencial:

$$(3x^2+2xy+xy^2+3xy^2+2y^3+y^4)dx+(x^2+4x^2y+5xy^2+xy^2+4xy^3+5y^4)dy=0$$

Verificamos que la ecuación diferencial es exacta.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 8xy + 6y^2 + 4y^3$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 8xy + 6y^2 + 4y^3$$

Luego buscamos una función U tal que $U = C$ sea una solución general de la ecuación diferencial.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + xy^2 + 3xy^2 + 2y^3 + y^4$$

$$U = \int (3x^2 + 2xy + xy^2 + 3xy^2 + 2y^3 + y^4)\partial x + f(y)$$

$$U = x^3 + x^2y + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{3}{2}x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + f(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + x^2y + 3x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + f'(y)$$

$$x^2 + x^2y + 3x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + f'(y) = x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4$$

$$f'(y) = 5y^4 \ \rightarrow \ f(y) = y^5$$

$$U = x^3 + x^2y + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{3}{2}x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + \underbrace{y^5}_{f(y)}$$

$$U = C$$