Universidad de Costa Rica — MA1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería

Escuela de Matemática — 26 de setiembre de 2018 (II-2018)

Tiempo: 3 horas — Puntaje Total: 90pts

PRIMER EXAMEN PARCIAL

Instrucciones: Este es un examen de desarrollo, todos los procedimientos que justifiquen su respuesta deben aparecer en el cuaderno de examen. No se permiten hojas sueltas durante el examen, ni el intercambio de instrumentos o materiales (incluyendo calculadora). **No se permite el uso calculadoras programables ni celulares.**

1. Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \tan^2(x+y)$$

(a) [5 pts.] Muestre que el cambio de variable $u = x + y$ transforma la ecuación diferencial en separable.

SOLUCIÓN:

Si $u = x + y$ entonces $u' = 1 + \frac{dy}{dx}$

$$\frac{du}{dx} - 1 = \tan^2 u \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \tan^2 u + 1$$

$$\frac{du}{\sec^2 u} = dx \quad \rightarrow \quad \text{ED } \textit{Separable}$$

(b) [10 pts.] Resuelva la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN:

$$\int \frac{du}{\sec^2 u} = \int dx$$

$$\int \cos^2 u = x + c \qquad\qquad \cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int (1+\cos(2u))du = x + c$$

$$\frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right) = x + c$$

$$\frac{1}{2}\left(x + y + \frac{1}{2}\sin 2(x+y)\right) = x + c$$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) [15 pts.] $\frac{dy}{dx} - y^3 \csc(x) = y\cot(x)$

SOLUCIÓN:

$$y' - y\cot x = \csc x y^3$$
$$y^{-3}y' - y^{-2}\cot x = \csc x$$

Tomamos $v = y^{-2}$ entonces $v' = -2y^{-3}y'$

$$-\frac{v'}{2} - v\cot x = \csc x$$

$$v' + 2v\cot x = -2\csc x \qquad \text{ED Lineal}$$

$$\mu(x) = e^{2\int \frac{\cos x}{\sin x}dx} = e^{2\int \frac{d\omega}{\omega}} \quad \text{donde} \quad \omega = \sin x \ \text{ y } \ d\omega = \cos x dx$$

$$\to \mu(x) = \sin^2 x \qquad \text{factor integrante}$$

$$\int (\sin^2 x \cdot v)' = -2\int \sin x dx$$

$$\sin^2 x \cdot v = -2\cos x + c$$

$$v = 2\cot x \csc x + c\csc^2 x$$
$$y^{-2} = 2\cot x \csc x + c\csc^2 x$$

(b) [15 pts.] $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

SOLUCIÓN:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{x^2 - xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + (\frac{y}{x})^2}{1 - (\frac{y}{x})} = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

Si tomamos la sustitución $v = \frac{y}{x}$ entonces $y = vx$, $y' = v + xv'$.

$$v + xv' = \frac{v^2 + 1}{v - 1}$$

$$xv' = \frac{v + 1}{v - 1} \quad \text{ED Separable}$$

$$\int \frac{v+1}{v-1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{v}{v+1} - \frac{1}{v+1} \right) = \ln x + c$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{v+1} - \frac{1}{v+1} \right) = \ln x + c$$

$$v - 2\ln(v+1) = \ln x + c$$

$$\frac{y}{x} - 2\ln\left(\frac{y}{x} + 1 \right) = \ln x + c$$

3. Dada la ecuación diferencial,

$$xy'' - y' - (x-1)y = 0.$$

(a) [5 pts.] Demuestre que $y_1(x) = e^x$ es solución.

SOLUCIÓN:

$$y_1 = e^x, \quad y_1^{'} = y_1^{''} = e^x$$
$$xe^x - e^x - (x-1)e^x = 0$$
$$x - 1 - x + 1 = 0$$
$$0 = 0$$

(b) [10 pts.] Halle la solución general.

SOLUCIÓN:

$$y_2 = e^x \int \frac{e^{-\int -\frac{1}{x} dx}}{e^{2x}} dx$$
$$y_2 = e^x \int xe^{-2x} dx$$

$$u = x \quad dv = e^{-2x} dx$$
$$du = x \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$= -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

$$y_2 = e^x\left(-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}e^{-x}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$y = Ae^x + Be^{-x}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

4. [20 pts.] Resuelva la ecuación diferencial:

$$4y'' + 36y = \csc(3x)$$

SOLUCIÓN:

Primero resolvemos la homogénea complementaria

$$y'' + 9y = 0$$

$$r^2 + 9 = 0 \quad \text{ecuación auxiliar asumiendo } y = e^{rx}$$

$$r = \pm 3i, \qquad y_c = A\cos 3x + B\sin 3x$$

Entonces

$$y_p = \Delta_1(x)y_1 + \Delta_2(x)y_2$$

$$y_p = \Delta_1(x)\cos 3x + \Delta_2(x)\sin 3x$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3\cos^2 3x + 3\sin^2 3x = 3$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ -\frac{1}{4}\csc 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\sin 3x & -\frac{1}{4}\csc 3x \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\cot 3x$$

$$\Delta_1(x) = -\frac{1}{12}\int dx = -\frac{1}{12}x$$

$$\Delta_2(x) = \frac{1}{12} = \int \cot 3x dx = \frac{1}{36}\ln|\sin 3x|$$

$$y_p = -\frac{1}{12} x \cos 3x + \frac{1}{36} \ln|\sin 3x| \sin 3x$$

$$y = y_c + y_p$$

5. Dada la ecuación diferencial:

$$\cos(x)dx + \left(1 + \frac{2}{y}\right) sen(x)dy = 0$$

(a) [5 pts.] Encuentre un factor integrante que haga la ecuación diferencial exacta.

SOLUCIÓN:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \left(1 + \frac{2}{y}\right) \cos x$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-\left(1 + \frac{2}{y}\right) \cos x}{\left(1 + \frac{2}{y}\right) \sin x} = -\cot x$$

Entonces el factor integrante es dado por la función:

$$\eta(x) = e^{-\int \cot x dx} = \csc x$$

(b) [10 pts.] Resuelva la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN:

Luego de multiplicar el factor integrante la ecuación diferencial es exacta

$$\cot x dx + \left(1 + \frac{2}{y}\right) dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$$

$$\int \partial F = \int \cot x \partial x$$

$$F = \ln|\sin x| + A(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = A'(y)$$

$$\int \left(1 + \frac{2}{y}\right) dy = \int A'(y)$$

$$A(y) = y + 2\ln|y|$$

$$F = \ln|\sin x| + y + 2\ln|y|$$

$$F = C$$