Universidad de Costa Rica — MA1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería

Escuela de Matemática — 16 de junio de 2018 (I-2018)

Tiempo: 3 horas — Puntaje Total: 75pts

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (SOLUCIÓN)

Instrucciones: Este es un examen de desarrollo, todos los procedimientos que justifiquen su respuesta deben aparecer en el cuaderno de examen. No se permiten hojas sueltas durante el examen, ni el intercambio de instrumentos o materiales (incluyendo calculadora). **No se permite el uso calculadoras programables ni celulares.**

1. [20 pts.] Usando serie de potencias centrada en cero, hallar una solución general de:

$$(x^2-1)y''+4xy'+2y=0$$

SOLUCIÓN:

$$y''+\frac{4x}{x^2-1}y'+\frac{2}{x^2-1}y=0$$

$p(x)=\frac{4x}{x^2-1}$ y $q(x)=\frac{2}{x^2-1}$ son analíticas en cero, este es un punto ordinario de la ecuación diferencial. Entonces existe solución:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$y'=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

Sustituye en la ecuación diferencial:

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+4x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}4na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}4na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2a_2 - 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} 4a_n x^n + 4a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_n x^n + 2a_0 + 2a_1 x = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[n(n-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} + 4na_n + 2a_n\right] x^n + (2a_0 - 2a_2) + (6a_1 - 6a_3)x = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n^2+3n+2)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n + (2a_0 - 2a_2) + (6a_1 - 6a_3)x = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_n - (n+1)(n+2)a_{n+2}]x^n + (2a_0 - 2a_2) + (6a_1 - 6a_3)x = 0$$

$$\begin{cases} 2a_0 - 2a_2 = 0 \\ 6a_1 - 6a_3 = 0 & \qquad n = 2, 3, ... \\ (n+2)(n+1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = a_0 \\ a_3 = a_1 & \qquad n = 2, 3, ... \\ a_{n+2} = a_n \end{cases}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$$

2. *Transformada de Laplace.*

   (a) [10pts.] Calcule la *Transformada de Laplace* de la siguiente función:

$$f(t) = t(e^{-t} + e^{-2t})^2.$$

SOLUCIÓN:

$$\mathcal{L}\Big(t(e^{-t} + e^{-2t})^2\Big) = \mathcal{L}\Big(t(e^{-2t} + 2e^{-3t} + e^{-4t})\Big)$$

$$= \mathcal{L}(te^{-2t}) + 2\mathcal{L}(te^{-3t}) + \mathcal{L}(te^{-4t})$$

$$= \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{2}{(s+3)^2} + \frac{1}{(s+4)^2}$$

(b) [10pts.] Encuentre una función $f(t)$ cuya *Transformada de Laplace* sea:

$$F(s) = \ln\left(\frac{s^2+1}{s(s+3)}\right).$$

SOLUCIÓN:

$$F(s) = \ln\Big(\frac{s^2+1}{s(s+3)}\Big)$$

$$F(s) = \ln(s^2+1) - \ln(s(s+3))$$

$$F'(s) = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2s+3}{s(s+3)}$$

$$-\mathcal{L}(tf(t)) = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2s+3}{s(s+3)}$$

$$tf(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{2s+3}{s(s+3)}\Big) - 2\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{s}{s^2+1}\Big)$$

$$tf(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{2}{s+3}\Big) + 3\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s(s+3)}\Big) - 2\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{s}{s^2+1}\Big)$$

$$tf(t) = e^{-3t} - 2\cos(t) + 1$$

$$f(t) = \frac{e^{-3t} - 2\cos(t) + 1}{t}$$

(c) [10pts.] Encuentre una función $f(t)$ cuya *Transformada de Laplace* sea:

$$F(s) = \left(\frac{s}{(s^2+s+2)(s+4)}\right)$$

SOLUCIÓN:
Fracciones parciales:

$$\frac{s}{(s+4)(s^2+4+2)} = \frac{A}{s+4} + \frac{Bs+C}{s^2+s+2}$$

$$A = \frac{-2}{7},\ \ B = \frac{2}{7},\ \ C = \frac{1}{7}$$

$$\frac{s}{(s+4)(s^2+s+2)} = \frac{\frac{-2}{7}}{s+4} + \frac{\frac{2}{7}s + \frac{1}{7}}{s^2+s+2}$$

$$= -\frac{2}{7}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+4}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{2}{7}s}{s^2+s+2}\right) + \frac{1}{7}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+2}\right)$$

$$= -\frac{2}{7}e^{-4t} + \frac{2}{7}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{7}{4}}^2}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2 + \sqrt{\frac{7}{4}}^2}\right)\right] + \frac{1}{7}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2 + \sqrt{\frac{7}{4}}^2}\right)$$

$$= -\frac{2}{7}e^{-4t} + \frac{2}{7}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}sen\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right)\right) + \frac{1}{7}e^{-\frac{1}{2}t}sen\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right)$$

$$= -\frac{2}{7}e^{-4t} + \frac{2}{7}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}t}{2}\right)$$

3. [15pts.] Resuelva la siguiente ecuación *Integro-Diferencial*:

$$y'(t) + y(t) - \int_0^t (1+u)\cdot y(t-u)du = t-1, \quad con \;\; y(0) = 0.$$

SOLUCIÓN:

$$\mathcal{L}(y' + y - \int_0^t y(t-u)(u+1)du) = \mathcal{L}(t-1)$$

$$\mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}\big(\int_0^t y(t-u)(u+1)du\big) = \mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(1)$$

$$s\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(y*(t+1)) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$$

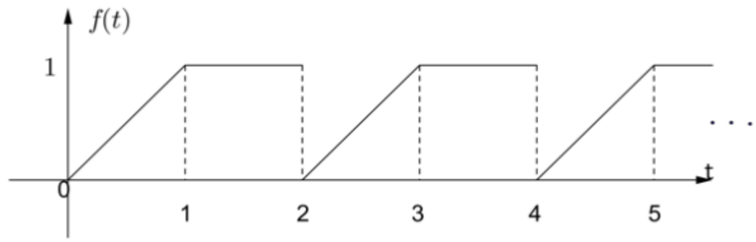
$$s\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(y)\cdot\mathcal{L}(t+1)) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$$

$$\Big(\frac{s^3+s^2-s-1}{s^2}\Big)\mathcal{L}(y) = \frac{1-s}{s^2}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1-s}{s^3+s^2-s-1}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{-(s-1)}{(s-1)(s+1)^2}$$

$$\mathcal{L}(y) = -\frac{1}{(s+1)^2} = -te^{-t}$$



4. [15pts.] Calcule la *Transformada de Laplace* de la función periódica $f(t)$:

SOLUCIÓN:

$$f(t) = \begin{cases} t, & si\ \ 0 \le t \le 1 \\ 1, & si\ \ 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\Big[\int_0^1 e^{-st}t dt + \int_1^2 e^{-st}dt\Big]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\Big(\frac{-e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s}\Big)$$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$t^n\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$H(t-a) = \mathrm{u}_a(t)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^nF}{ds^n}(s)$
$H(t-a)f(t-a) = \mathrm{u}_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$f(t) * g(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-u)g(u)\,du$	$F(s) \cdot G(s)$
$f^{(n)}(t)\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
Si $p > 0$ y $f(t+p) = f(t)$	$\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt$
Si $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^{+\infty} F(u)\,du$