Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática

Departamento de Matemática Aplicada
MA-1005: Ecuaciones Diferenciales
I Ciclo lectivo del 2019

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (Solución[1])

Fecha de aplicación: Sábado 15 de junio del 2019

1-) Calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones.

(a) $f(t) := te^t\delta(t-3\pi)$,

(b) $g(t) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 1-2t & \text{si} \quad 1 \leqslant t \leqslant 3 \\ \dfrac{1-e^{3-t}}{t-3} & \text{si} \quad t > 3 \end{cases}$.

Solución. Ad(a): Vea que $\mathcal{L}[t\delta(t-3\pi)] = -(e^{-3\pi s})' = 3\pi e^{-3\pi s}$ gracias al segundo teorema de traslación. Así $\mathcal{L}[te^t\delta(t-3\pi)] = 3\pi e^{-3\pi(s-1)}$, por el primer teorema de traslación.

Ad(b): Expresando la función $g(t)$con la ayuda de la función de haeviside obtenemos

$$g(t) = 1 - 2t\mathcal{H}_1(t) + \left(\frac{1-e^{3-t}}{t-3} - 1 + 2t\right)\mathcal{H}_3(t).$$

Como $\mathcal{L}[1] = 1/s$, $\mathcal{L}[2t\mathcal{H}(t-1)] = 2e^{-s}\,\mathcal{L}[t-1] = 2e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$ y

$$\mathcal{L}\left[\frac{1-e^{-t}}{t}\right] = \ln\left(\frac{s+1}{s}\right),$$

pues $t\dfrac{1-e^{-t}}{t} = 1-e^{-t} \Rightarrow -F(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1} \Rightarrow F(s) = \ln\left(\dfrac{s+1}{s}\right) + C$, y como $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$ entonces $C = 0$.

Por ende

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[2t\mathcal{H}_1(t)] + \mathcal{L}\left[\left(\frac{1-e^{3-t}}{t-3} - 1 + 2t\right)\mathcal{H}_3(t)\right] \\ &= \frac{1}{s} - 2e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right) + e^{-3s}\left(\frac{5}{s} + \frac{2}{s^2} + \ln\left(\frac{s+1}{s}\right)\right).\end{aligned}$$

◀

2-) Determine una función $f(t)$ cuya transformada de Laplace sea

$$F(s) = \frac{e^{-3s}-1}{(s+1)^3} + \frac{1}{\sqrt{s+1}}.$$

[1]Soluciones propuestas por los profesores Lourdes Hernández y Adrián José Naranjo.

Solución. Nótese que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}-1}{(s+1)^3}+\frac{1}{\sqrt{s+1}}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{(s+1)^3}+\frac{1}{(s+1)^3}+\frac{1}{\sqrt{s+1}}\right]\\
&= \mathcal{H}_3(t)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right]_{s-3} - e^{-t}\,\mathcal{L}\left[\frac{2}{2s^3}-\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2)s^{1/2}}\right]\\
&= \mathcal{H}_3(t)\left[e^{3-t}\cdot\frac{(t-3)^2}{2}\right] - e^{-t}\left[\frac{t}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right].
\end{aligned}$$

◀

3-) Resuelva la ecuación integro-diferencial

$$y''(t)+y(t)+\int_0^t (t-x)y(x)dx+\frac{t^3}{6}+\operatorname{sen}(t)=0,$$

sujeta a las condiciones iniciales $y'(0)=y(0)=0$.

Solución. Sea $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$, entonces aplicando la Transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación obtenemos

$$s^2Y(s)+Y(s)+\frac{Y(s)}{s^2}+\frac{1}{s^4}+\frac{1}{s^2+1}=0 \Rightarrow Y(s)\left(\frac{s^4+s^2+1}{s^2}\right)+\frac{s^4+s^2+1}{s^4(s^2+1)}=0,$$

de donde

$$Y(s)=\frac{-1}{s^2(s^2+1)}=\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2}\Rightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2}\right]=\operatorname{sen}(t)-t.$$

◀

4-) Determine la solución general del siguiente sistema ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}+x &=& e^t\\[2ex] \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2y}{dt^2} &=& 1\end{array}\right..$$

Solución. Escribiendo el sistema de ecuaciones diferenciales utilizando operadores diferenciales obtenemos

$$\left\{\begin{array}{lcl}(D^2+1)x+Dy &=& e^t\\ Dx+D^2y &=& 1\end{array}\right..$$

Multiplicando la primera ecuación por $-D$ y sumando ambas ecuaciones obtenemos $D^3x=e^t-1$, por lo que

$$x'''(t)=-1+e^t\Rightarrow x(t)=\iiint(-1+e^t)dtdtdt=e^t-\frac{t^3}{6}+\frac{c_1t^2}{2}+c_2t+c_3,$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Ahora bien, sustituyendo en la primera ecuación el valor de $x = x(t)$ obtenemos

$$y'(t) = -x(t)e^t - x''(t) = \frac{t^3}{6} - c_1\frac{t^2}{2} - c_2 t - c_3 - e^t - t - c_1.$$

Finalmente, integrando obtenemos

$$y(t) = -(c_1 + c_3)t + \left(\frac{c_2}{2} - \frac{1}{2}\right)t^2 - \frac{c_1}{6}t^3 + \frac{t^4}{24} - e^t + c_4,$$

con $c_4 \in \mathbb{R}$. Por ende, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x(t) &= \qquad\qquad e^t - \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{c_1 t^2}{2} + c_2 t + c_3 \\ y(t) &= -(c_1 + c_3)t + \left(\dfrac{c_2}{2} - \dfrac{1}{2}\right)t^2 - \dfrac{c_1}{6}t^3 + \dfrac{t^4}{24} - e^t + c_4 \end{cases}.$$

◀

5-) Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no-homogéneo

$$\begin{cases} x'(t) &= -4x(t) + 2y(t) + \dfrac{1}{t} \\ \\ y'(t) &= 2x(t) - y(t) + \dfrac{1}{t^2} \end{cases},$$

con $t > 0$.

(a) Escriba el sistema dad en la forma $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t)$.

(b) Calcule los valores propios de la matriz A.

(c) Halle la solución general del sistema homogéneo asociado.

(d) Determine una solución particular del sistema no-homogéneo.

Solución. Ad(a) El sistema escrito en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/t \\ 2/t \end{bmatrix}.$$

Ad(b): Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Vea que

$$A - 2I_2 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix},$$

por lo que $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (\lambda + 4)(\lambda + 1) - 4 = \lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda + 5)$ es el polinomio característico de A, por lo que $\lambda = -5$ y $\lambda = 0$ son los valores propios de A.

Ad(c): Sea $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^t$. Resolviendo la ecuación $A\boldsymbol{v} = 0$ obtenemos

$$\begin{cases} -4v_1 + 2v_2 &= 0 \\ 2v_1 - v_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = 2v_1.$$

Por lo que $\boldsymbol{v} = (v_1, 2v_1)^t = v_1(1,2)^t$ es un vector propio asociado a $\lambda = 0$. Resolviendo la ecuación $A\boldsymbol{v} = -5\boldsymbol{v}$ obtenemos que $\boldsymbol{v} = (2,-1)^t$ es un vector propio asociado a $\lambda = -5$. Finalmente, como $\{(1,2)^t, (2,-1)^t\}$ es un conjunto linealmente independiente llegamos a que la solución general del sistema homogéneo asociado es

$$\boldsymbol{x}_h(t) = c_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ad(d): La matriz fundamental del sistema es

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2e^{-5t} \\ 2 & -e^{-5t} \end{bmatrix},$$

con inversa

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{-1}{5e^{-5t}} \begin{bmatrix} -e^{-5t} & -2e^{-5t} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2e^{5t}/5 & -e^{5t}/5 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2e^{5t}/5 & -e^{5t}/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/t \\ 2/t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por ende

$$\boldsymbol{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2e^{-5t} \\ 2 & -e^{-5t} \end{bmatrix} \int^t \begin{bmatrix} 1/u \\ 0 \end{bmatrix} du = \begin{bmatrix} 1 & 2e^{-5t} \\ 2 & -e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(t) \\ 2\ln(t) \end{bmatrix}$$

es una solución particular del sistema de ecuaciones.

◀