Universidad de Costa Rica MA1005 Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería

Escuela de Matemática 27 de octubre de 2018 (II-2018)

Tiempo: 3 horas Puntaje Total: 86pts

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (SOLUCIÓN)

Instrucciones: Este es un examen de desarrollo, todos los procedimientos que justifiquen su respuesta deben aparecer en el cuaderno de examen. No se permiten hojas sueltas durante el examen, ni el intercambio de instrumentos o materiales (incluyendo calculadora). **No se permite el uso calculadoras programables ni celulares.**

1. [20 pts] Hallar la solución general de la ecuación en forma de serie de potencia. Debe expresar los primeros cuatro términos no nulos.

$$y'' + (\cos(x))y = 0$$

SOLUCIÓN:

$$y'' + (\cos(x))y = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \cdots + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots)$$

$$2c_2 + c_0 + (6c_3 + c_1)x + \left(12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0\right)x^2 + \left(20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1\right)x^3 + \cdots = 0.$$

$$2c_2 + c_0 = 0, \quad 6c_3 + c_1 = 0, \quad 12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0 = 0, \quad 20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1 = 0.$$

$$\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2}c_0, \quad c_3 = -\frac{1}{6}c_1, \quad c_4 = \frac{1}{12}c_0, \quad c_5 = \frac{1}{30}c_1$$

Agrupando términos, llegamos a la solución general $y = c_0 y_1 + c_1 y_2$, donde

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \cdots \qquad y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 - \cdots$$

2. [20 pts] Considere la ecuación diferencial $2xy'' + (x+1)y' + y = 0$. Utilice el método de Frobenius para resolver la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN:

Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, entonces

$$2xy''+(1+x)y'+y = 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)c_n x^{n+r}$$

$$= x^r\left[r(2r-1)c_0 x^{-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n-1}}_{k=n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)c_n x^n}_{k=n}\right]$$

$$= x^r\left[r(2r-1)c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}[(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1} + (k+r+1)c_k]x^k\right]$$

Tenemos que $r(2r-1) = 0$, y las raíces son $r_1 = 0$ y $r_2 = \frac{1}{2}$. Además,

$$(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1} + (k+r+1)c_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Para $r_1 = 0$ tenemos

$$c_{k+1} = \frac{-c_k}{2k+1}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Para $r_2 = \frac{1}{2}$ podemos dividir (1) por $k + \frac{3}{2}$, para obtener

$$c_{k+1} = \frac{-c_k}{2(k+1)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces para $r_1 = 0$ tenemos la solución

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)} x^n, \qquad |x| < \infty$$

Para $r_2 = \frac{1}{2}$

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{n+1/2}$$

$$y = Ay_1 + By_2$$

3. [15 pts] Resuelva el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}, \quad con \;\; y(0) = y'(0) = 0.$$

SOLUCIÓN:

$$\mathcal{L}(y'' + 4y' + 4y) = \mathcal{L}(t^2 e^{-2t})$$

$$\mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y') + 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(t^2 e^{-2t})$$

$$s^2\mathcal{L}(y) + 4s\mathcal{L}(y) + 4\mathcal{L}(y) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\mathcal{L}(e^{-2t})\right)$$

$$\mathcal{L}(y)(s^2 + 4s + 4) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$\mathcal{L}(y)(s+2)^2 = 2(s+2)^{-3}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{2}{(s+2)^5}$$

$$y = 2e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^5}\right)$$

$$y = \frac{1}{12}t^4 e^{-2t}$$

4. *Transformada de Laplace.*

   (a) [7 pts] Calcule la *Transformada de Laplace* de la siguiente función:

$$f(t) = e^{3t}\left(9 - 4t + 10sen\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

SOLUCIÓN:

$$\mathcal{L}\left(e^{3t}\left(9 - 4t + 10\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right) = \mathcal{L}\left(9e^{3t} - 4te^{3t} + 10e^{3t}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

$$= 9\mathcal{L}(e^{3t}) - 4\mathcal{L}(te^{3t}) + 10\mathcal{L}\left(e^{3t}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{9}{s-3} + \frac{4}{(s-3)^2} + \frac{5}{(s-3)^2 + \frac{1}{4}}$$

(b) [7 pts] Encuentre una función $f(t)$ cuya *Transformada de Laplace* sea:

$$F(s) = \frac{s-3}{(s-\sqrt{3})(s+\sqrt{3})}$$

SOLUCIÓN:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-3}{(s-\sqrt{3})(s+\sqrt{3})}\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(s+\sqrt{3})} - \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(s-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-(-\sqrt{3})}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-(-\sqrt{3})}\right) - \frac{3}{2\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\sqrt{3}t} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{3}t} - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\sqrt{3}t} + \frac{1}{2}e^{\sqrt{3}t}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{-\sqrt{3}t} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{\sqrt{3}t}$$

(c) [7 pts] Calcule la *Transformada de Laplace* de la siguiente función:

$$f(t) = te^{2t}sen(6t)$$

SOLUCIÓN:

$$\mathcal{L}(te^{2t}\sin(6t)) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{6}{(s-2)^2+36}\right)$$

$$= \frac{12s-24}{(s-2)^2+36}$$

5. [15 pts] Resuelva la ecuación integro-diferencial

$$y'(t) = 1 - sen(t) - \int_0^t y(u)du, \quad con \;\; y(0) = 0$$

SOLUCIÓN:

$$\mathcal{L}(y') - \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(\sin(t)) + \mathcal{L}\left(\int_0^\tau y(\tau)d\tau\right) = 0$$

$$sY - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s}Y = 0$$

$$Y\left(s+\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2+1}$$

$$Y=\frac{1}{s^2+1}-\frac{s}{(s^2+1)^2}$$

$$y=\sin(t)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right)$$

Por convolución:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)*\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$=\sin(t)*\cos(t)$$

$$=\int_0^t \sin(t-u)\cos(u)du$$

Aplica: $\sin(A)\cdot\cos(B)=\frac{1}{2}[\sin(A-B)+\sin(A+B)]$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right)=\frac{1}{2}\int_0^t(\sin(t-2u)+\sin(t))du$$

$$=\frac{1}{2}t\sin(t)$$

Entonces la solución es:

$$y=\sin(t)-\frac{1}{2}t\sin(t)$$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$t^x, \ x > -1$	$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$
$H(t-a) = \mathrm{u}_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta_0(t-a) = \delta_a(t)$	e^{-as}
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n F}{ds^n}(s)$
$H(t-a) f(t-a) = \mathrm{u}_a(t) f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
$f(t) * g(t) = \displaystyle\int_0^t f(t-u) g(u) \, du$	$F(s) \cdot G(s)$
$f^{(n)}(t) \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
Si $p > 0$ y $f(t+p) = f(t)$	$\frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt$
Si $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^{+\infty} F(u) \, du$