Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Dpto. Matemática Aplicada
MA-1005
Ecuaciones Diferenciales
Ciclo II-2019

Primer Examen Parcial

Instrucciones: El examen debe ser escrito con bolígrafo (azul o negro), si hay partes escritas con lápiz, puede ver afectado su derecho a reclamar. Este examen es de desarrollo, por lo que, para cada uno de los ítems, debe aparecer todo el procedimiento que justifique correctamente la solución.
Puntaje total: 70 puntos (calificados sobre 65).
Porcentaje: 35% **Tiempo:** 2 horas.

Enunciados

1) (10 ptos.) Seleccione **solo una** de las dos ecuaciones diferenciales a continuación, y determine su solución general:

   (a) $2(x+2y)\,dx+(y-x)\,dy=0$ [10 puntos]

   (b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2-\pi^2}$ [10 puntos]

2) (20 ptos.) Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\left(\frac{3x^2}{y^2}\tan(y)-\frac{2y}{x^3}\right)dx+\left(\frac{x^3}{y^2}\sec^2(y)+4y+\frac{3}{x^2}\right)dy=0$$

   (a) Compruebe que la ecuación diferencial **no** es exacta. [4 puntos]

   (b) Construya un factor integrante de la forma y^m, con $m\in\mathbb{Q}$. [6 puntos]

   (c) Determine la solución general de la ecuación diferencial. [10 puntos]

3) (20 ptos.) Considere la ecuación diferencial $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+y=x(20-\ln x)$ con $x\in\,]0,+\infty[$.

   (a) Verifique que al realizar el cambio de variable $x=e^t$ se obtiene la ecuación diferencial $y''(t)+y(t)=e^t(20-t)$ [5 puntos]

   (b) Resuelva la ecuación diferencial. [15 puntos]

4) (20 ptos.) Considere la ecuación diferencial $x''(t)-2x'(t)+x(t)=\dfrac{e^t}{1+t^2}$

   (a) Determine la solución general. [15 puntos]

   (b) Halle la solución particular que satisface las condiciones $x(0)=0$, $x'(0)=2$. [5 puntos]

Solución

1) (a) Sean $M = 2(x+2y)$ y $N = y - x$, los cuales son polinomios en dos variables cuyo grado es igual a 1, e iguales entre sí. Por tanto la ecuación diferencial es homogénea (de grado cero). Hacemos el cambio de variable $y = ux \Rightarrow dy = x\,du + u\,dx$. Sustituyendo se tiene que

$$2(x+2ux)dx + (ux - x)(x\,du + u\,dx) = 0 \Rightarrow (2x + 4ux + u^2x - ux)\,dx + (ux^2 - x^2)\,du = 0$$

$$\Rightarrow x(2 + 3u + u^2)\,dx + x^2(u-1)\,du = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-u}{u^2+3u+2}\,du \Rightarrow \ln|x| = \int \frac{1-u}{(u+2)(u+1)}\,du = \int \frac{-3}{u+2}\,du + \int \frac{2}{u+1}\,du$$

$$\Rightarrow \ln|x| = -3\ln|u+2| + 2\ln|u+1| + C$$

$$\therefore\ \ln|x| = -3\ln\left|\frac{y}{x} + 2\right| + 2\ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + C$$

(b) Suponiendo que $x = \varphi(y)$, la ecuación diferencial se modifica de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^2 - \pi^2}{2xy} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y}x = \frac{-y^2 - \pi^2}{2y}x^{-1}$$

la cual es de Bernoulli, para x, con $n = -1$. Haciendo la sustitución $v = x^{1-n} = x^{1-(-1)} = x^2$ la ecuación diferencial se transforma en la ED lineal de primer orden

$$v' - v\frac{1}{y} = \frac{-y^2 - \pi^2}{y}$$

Calculamos el factor integrante

$$\mu(y) = \exp\left(\int \frac{-1}{y}\,dy\right) = \exp(-\ln y) = \frac{1}{y}$$

Luego,

$$v = y\left[\int \frac{-y^2 - \pi^2}{y} \cdot \frac{1}{y}\,dy + C\right] = y \cdot \left[-y + \frac{\pi^2}{y} + C\right] = -y^2 + \pi^2 + Cy$$

Finalmente, la solución general es $\boxed{x^2 + y^2 - \pi^2 = Cy,}$ con $C \in \mathbb{R}$.

2) (a) Sean $M = \frac{3x^2}{y^2}\tan y - \frac{2y}{x^3}$ y $N = \frac{x^3}{y^2}\sec^2 y + 4y + \frac{3}{x^2}$. Tenemos que

$$M_y = \frac{-6x^2}{y^3}\tan y + \frac{3x^2}{y^2}\sec^2 y - \frac{2}{x^3} \neq \frac{3x^2}{y^2}\sec^2 y - \frac{6}{x^3} = N_x$$

(b) Calculamos $\dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{\left(\frac{3x^2}{y^2}\sec^2 y - \frac{6}{x^3}\right) - \left(\frac{-6x^2}{y^3}\tan y + \frac{3x^2}{y^2}\sec^2 y - \frac{2}{x^3}\right)}{\frac{3x^2}{y^2}\tan y - \frac{2y}{x^3}} = \dfrac{2}{y}$. Esto implica que $\mu(y) = e^{\int 2/y\,dy} = y^2$.

Observación: También se puede asumir (tal como se afirma en el enunciado) que $\mu(y) = y^m$ y se determina que $m = 2$ por medio del criterio de exactitud.

(c) Multiplicamos la ED por $\mu(y)$ para hacerla exacta:

$$\left(3x^2\tan(y) - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3\sec^2(y) + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$$

Sean $P = 3x^2\tan(y) - \frac{2y^3}{x^3}$ y $Q = x^3\sec^2(y) + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}$, entonces:

$$F(x,y) = \int P\,dx = x^3\tan y + \frac{y^3}{x^2} + h(y)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = x^3\sec^2 y + \frac{3y^2}{x^2} + h'(y) = Q \Longrightarrow h'(y) = 4y^3 \Longrightarrow h(y) = y^4$$

Por lo tanto, la solución general es $\boxed{x^3\tan y + \frac{y^3}{x^2} + y^4 = C \text{ constante}}$

3) (a) Al hacer el cambio de variable $x = e^t$ se obtiene que $t = \ln x$ y esto implica que

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

y la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) = e^t(20 - t)$$

que es una ecuación diferencial de orden dos con coeficientes constantes y no homogénea.

(b) Un conjunto fundamental de la homogénea es $\{\cos t, \sin t\}$. Ahora, para la solución particular de la no homogénea se postula que (para usar el método de coeficientes indeterminados) $y_p = e^t(At + B)$ [por método del anulador sería escoger $(D-1)^2$] y se tienen las derivadas respectivas: $y_p' = e^t(At + A + B)$; $y_p'' = e^t(At + 2A + B)$. Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$y'' + y = 2Ate^t + (2A + 2B)e^t = -te^t + 20e^t$$

$$\Longrightarrow A = \frac{-1}{2}, \quad B = \frac{21}{2}$$

$\therefore\ y(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) + \frac{e^t}{2}(21 - t)$. Como $t = \ln x$,

$\boxed{y(x) = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x) + \frac{x}{2}(21 - \ln x)}$

4) (a) La ecuación diferencial es lineal de segundo orden, se resolverá por el método de variación de parámetros.

- EDH: $x'' - 2x' + x = 0$. Resolvemos la ecuación característica $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ (con multiplicidad 2)

$$\Longrightarrow x_h = c_1e^t + c_2te^t, \quad c_1, c_2 \text{ constantes}$$

- Calcularemos $x_p = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$. Tenemos que el wronskiano

$$W[e^t, te^t] = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t(1+t) \end{vmatrix} = e^{2t}$$

Además, los "wronskianos modificados" son

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & te^t \\ \frac{e^t}{1+t^2} & e^t(1+t)) \end{vmatrix} = \frac{-te^{2t}}{1+t^2}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & \frac{e^t}{1+t^2} \end{vmatrix} = \frac{e^{2t}}{1+t^2}$$

Por tanto,

$$c_1(t) = \int \frac{W_1}{W}\,dt = \int \frac{-t}{1+t^2}\,dt = \frac{-\ln|1+t^2|}{2},$$

$$c_2(t) = \int \frac{W_2}{W}\,dt = \int \frac{dt}{1+t^2}\,dt = \arctan t,$$

- $\boxed{\therefore\ x(t) = c_1e^t + c_2te^t - \dfrac{e^t\ln|1+t^2|}{2} + te^t\arctan t,\ \ c_1, c_2\ \text{ constantes.}}$

(b) Calculamos $x'(t) = c_1e^t + c_2(e^t + te^t) + \frac{1}{2}e^t((2+2t)\arctan t - \ln(1+t^2))$, y entonces se tiene que

$$x(0) = c_1 = 0 \Longrightarrow x'(0) = c_2 = 2$$

Por tanto, la solución particular que satisface las condiciones iniciales es

$$x(t) = te^t + 2te^t - \frac{e^t\ln|1+t^2|}{2} + te^t\arctan t$$